



Eye-Teach-Stats Eye-Tracking Vignettes © 2026

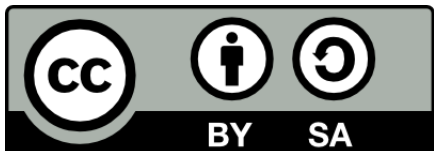


Co-funded by
the European Union

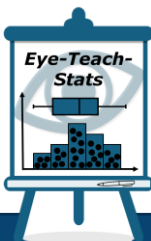
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the National Agency. Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

Eye-Tracking Vignettes



Eye-Tracking Vignettes © 2026 by Eye-Teach-Stats Project is licensed under CC BY-SA 4.0. To view a copy of this license, visit creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/



Overzicht



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

01 Dotplot

02 Boxplot

03 Boxplot

04 Case-Value Plot

05 Case-Value Plot

06 Dotplot

07 Histogram

08 Case-Value Plot

09 Histogram

10 Dotplot

11 Dotplot

12 Histogram

13 Histogram

14 Boxplot

15 Boxplot

16 Boxplot

17 Histogram

18 Case-Value Plot

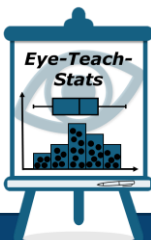
19 Histogram

20 Histogram

Ondersteunende informatie

Procedurele informatie

Oplossingen van leerlingen





Eye-Teach-Stats Eye-Tracking Vignettes © 2026



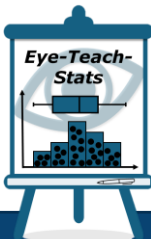
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the National Agency. Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

01 Dotplot

Vignette over een fout op basis van het overbenadrukken
van uitbijters



Introducing situation



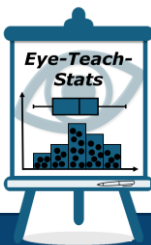
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 6de leerjaar / groep 8 over data-interpretatie. Je leidt leerlingen in in het vergelijken van de verdelingen van data via dotplots/stippendiagrammen.

Je ziet dat een van je leerlingen, Amaya, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Zij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Amaya aan werkt.



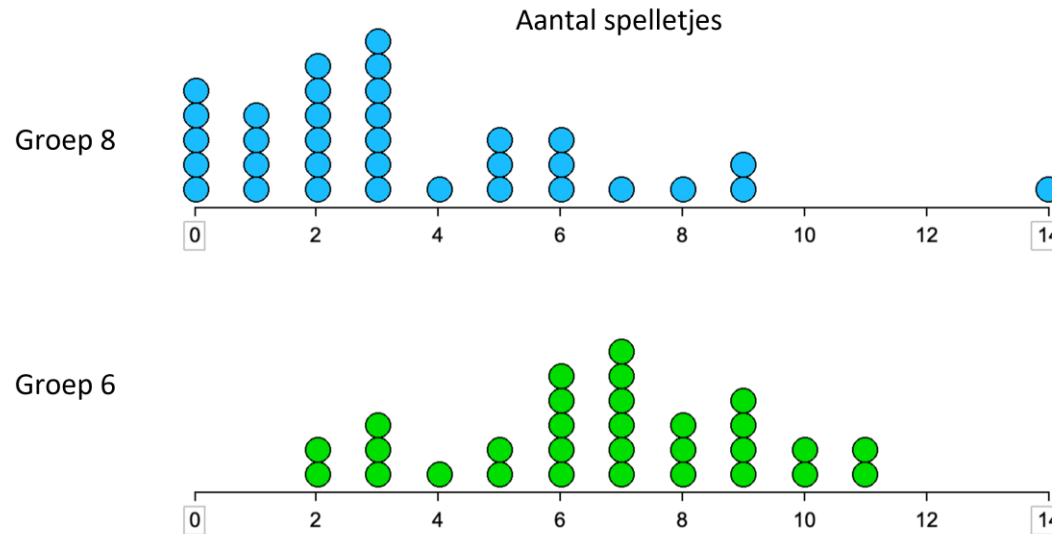
Students task



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

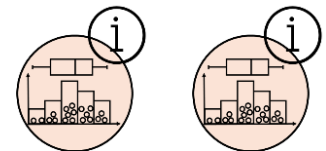
Verschillen leerlingen in groep 8 en groep 6 in het aantal spelletjes die ze op hun smartphone hebben? Een enquête over deze vraag werd uitgevoerd in de Parkschool, met 34 leerlingen uit groep 8 en 30 leerlingen uit groep 6. Vergelijk de twee steekproeven en evalueer vervolgens:



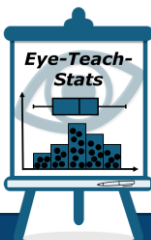
De data van de steekproeven komen overeen met de aanname dat

- a) leerlingen in groep 8 veel meer spelletjes op hun telefoon hebben.
- b) leerlingen in groep 6 veel meer spelletjes op hun telefoon hebben.
- c) leerlingen in groep 8 en 6 ongeveer evenveel spelletjes op hun telefoon hebben.

Dit is de taak waar Amaya aan werkt. **Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.**



- a) leerlingen in groep 8 veel meer spelletjes op hun telefoon hebben.
- b) leerlingen in groep 6 veel meer spelletjes op hun telefoon hebben.
- c) leerlingen in groep 8 en 6 ongeveer evenveel spelletjes op hun telefoon hebben.



Introducing eye-tracking

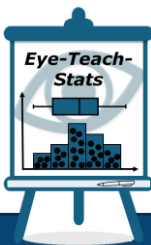


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een hittemap krijgen van je leerling Amaya, die gemaakt werd terwijl zij aan de taak werkte. De hittemap geeft aan waar haar visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



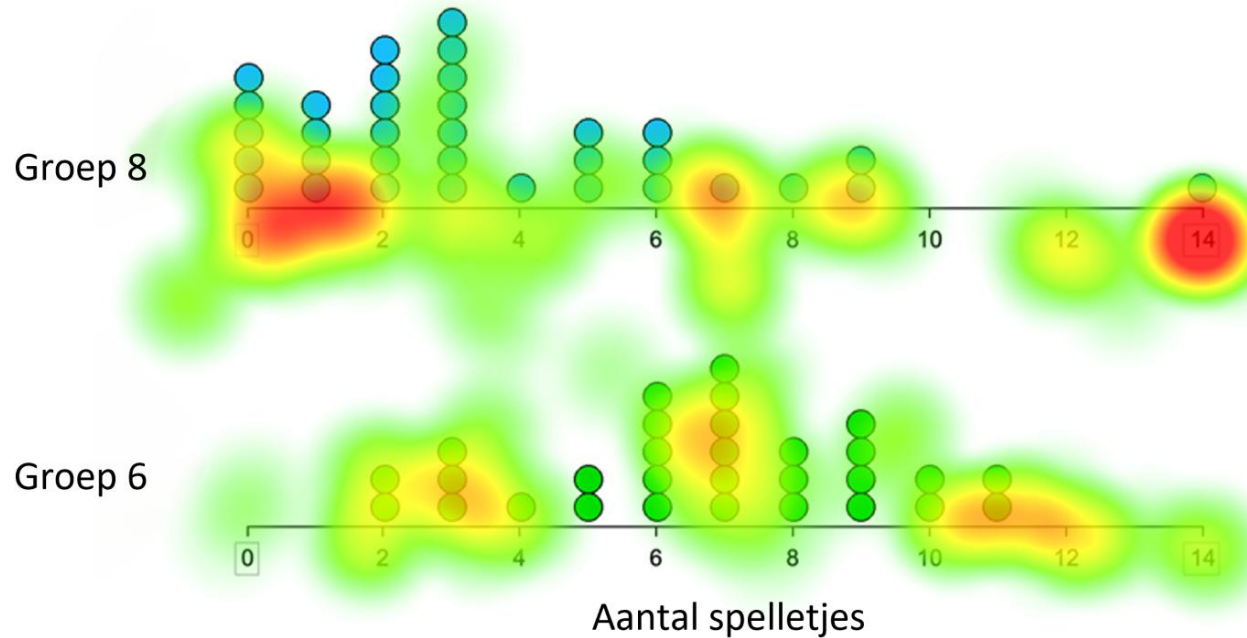
First look



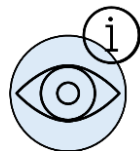
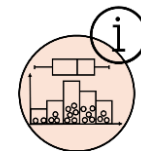
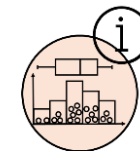
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Amaya's antwoord: "Ik denk dat a) correct is: de leerlingen in groep 8 hebben meer spelletjes."



Kijk naar de hittemap die de oogbewegingen van je leerling Amaya toont en naar haar antwoord.



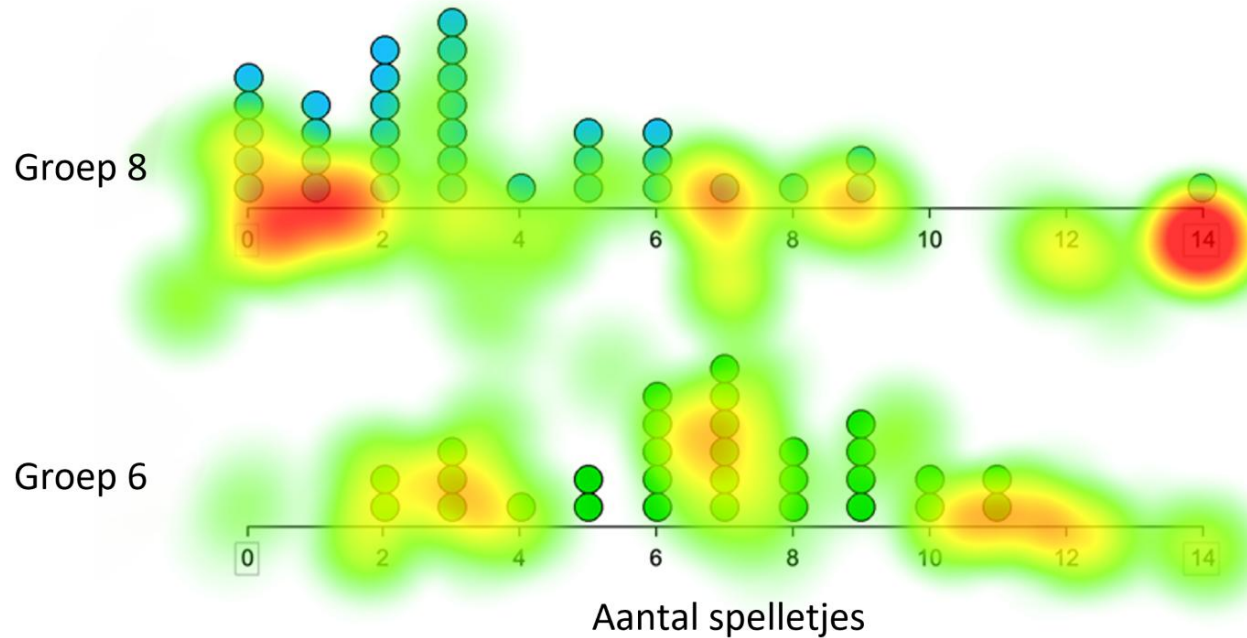
Take perspective



Co-funded by
the European Union

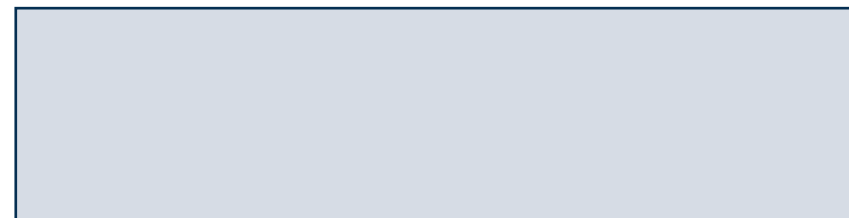
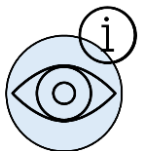
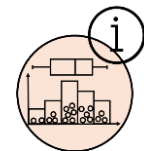
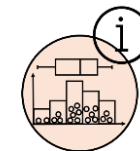
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Amaya's antwoord: "Ik denk dat a) correct is: de leerlingen in groep 8 hebben meer spelletjes."



Na de taak werd aan Amaya haar eigen hittemap getoond. Bij het terugkijken legt zij uit wat zij aan het denken was terwijl zij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Amaya te nemen, en formuleer wat zij gezegd kan hebben.



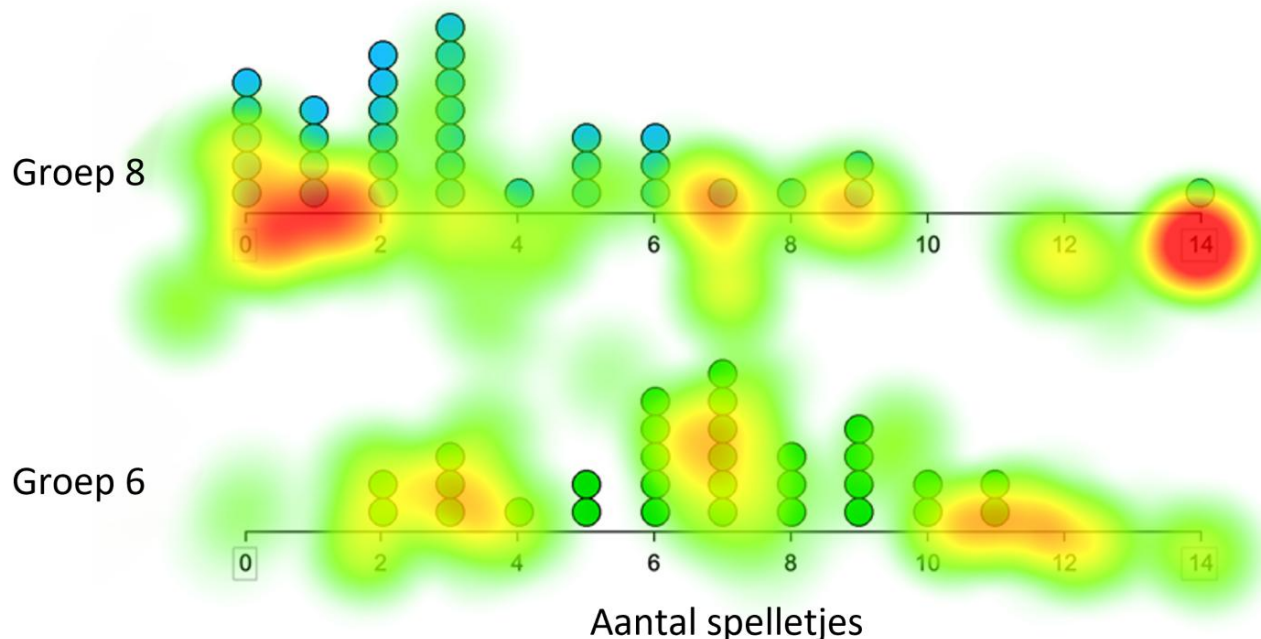
Indicate assumption



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Amaya's commentaar: "Hier zag ik dat een leerling van groep 8 14 spelletjes had. Dat is heel erg veel en dat heeft een grote invloed. Ik denk dus dat de leerlingen in groep 8 meer spelletjes hebben."

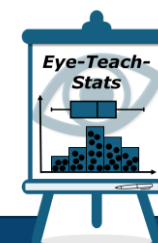
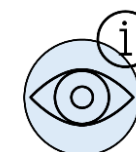
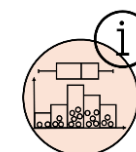
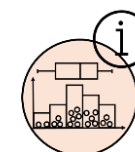


Je kan nu het echte commentaar van Amaya lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.

- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



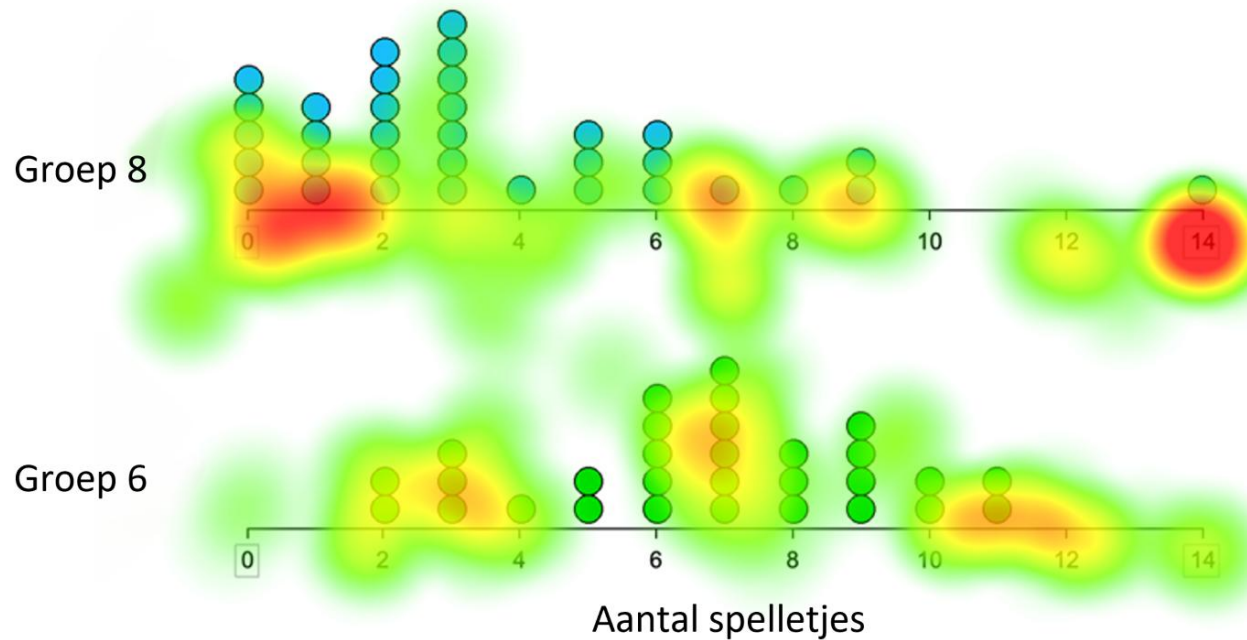
Evaluate solution



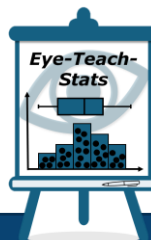
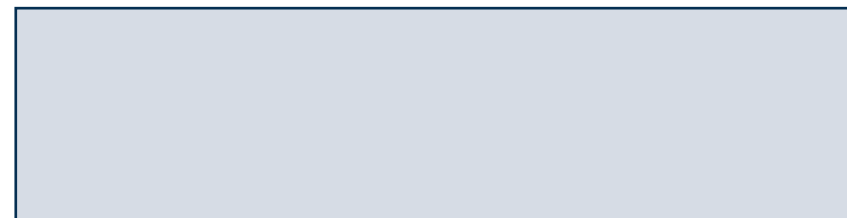
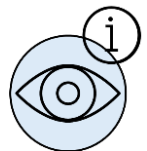
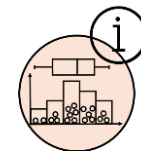
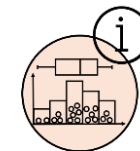
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Amaya's commentaar: "Hier zag ik dat een leerling van groep 8 14 spelletjes had. Dat is heel erg veel en dat heeft een grote invloed. Ik denk dus dat de leerlingen in groep 8 meer spelletjes hebben."



Evalueer Amaya's oplossing. Wat kan je zeggen van haar begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Begrijpen van fouten van leerlingen

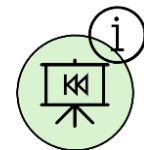
Amaya heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid met betrekking tot het interpreteren van dotplots. Die leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd het “**overbenadrukken van uitbijters/uitschieters**”.

Interpretatie van het gedrag: Amaya's hittemap en haar commentaren suggereren dat ze heel erg focust op de uitbijter als een individueel datapunt.

Het begrijpen van de fout en de onderliggende conceptuele moeilijkheid: In een dotplot staat elk bolletje voor één observatie van een waarde op de horizontale as (in dit geval het aantal spelletjes). De hoogte van de stapels (hoeveel bolletjes zijn op elkaar gestapeld) geeft aan hoe vaak elke waarde voorkomt.

Een centraal doel in het statistiekonderwijs is om leerlingen te helpen om een “globaal beeld” te krijgen van verdelingen. In dit beeld zien leerlingen verdelingen als conceptuele entiteiten met algemene kenmerken zoals een centrum, spreiding en vorm. Maar veel leerlingen hebben een “lokaal beeld” en zien verdelingen enkel als verzamelingen van individuele datapunten. Dit leidt hen ertoe om te veel te focussen op lokale details van de verdeling. De systematische fout doet zich voor in dit onterechte gebruik van een “lokaal beeld”.

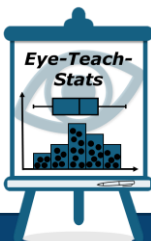
Op de volgende slide kan je een overzicht zien van lokale en globale kenmerken die meegenomen kunnen worden bij het vergelijken van verdelingen.



Perspectieven op de verdelingen van data: lokaal vs. globaal beeld

Globaal beeld ↓	Verdeling (conceptuele entiteit)			↑ Lokaal beeld
	Globale kenmerken			
	centrum <i>Visueel geschat gemiddelde...</i>	Spreiding/dichtheid <i>Geobserveerde uitgespreidheid, meerderheid, bereik, ...</i>	Vorm <i>Geobserveerde scheefheid, pieken, staarten...</i>	
	Lokale kenmerken Individuele datapunten <i>Extreme waarden, uitbijters, absolute frequentie van bolletjes in bepaalde intervallen, waarde van bepaalde intervallen, waarden los van de verdeling aan de uiteinden ...</i>			

Aangepast naar Schreiter & Vogel, 2023



Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the National Agency. Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

02 Boxplot

Vignette over een fout op basis van een oppervlakte-bias

Introducing situation



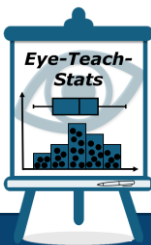
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 2de jaar secundair onderwijs / tweede klas over data-interpretatie. Je leidt leerlingen in in het vergelijken van de verdelingen van data via boxplots.

Je ziet dat een van je leerlingen, Quinn, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Hij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Quinn aan werkt.



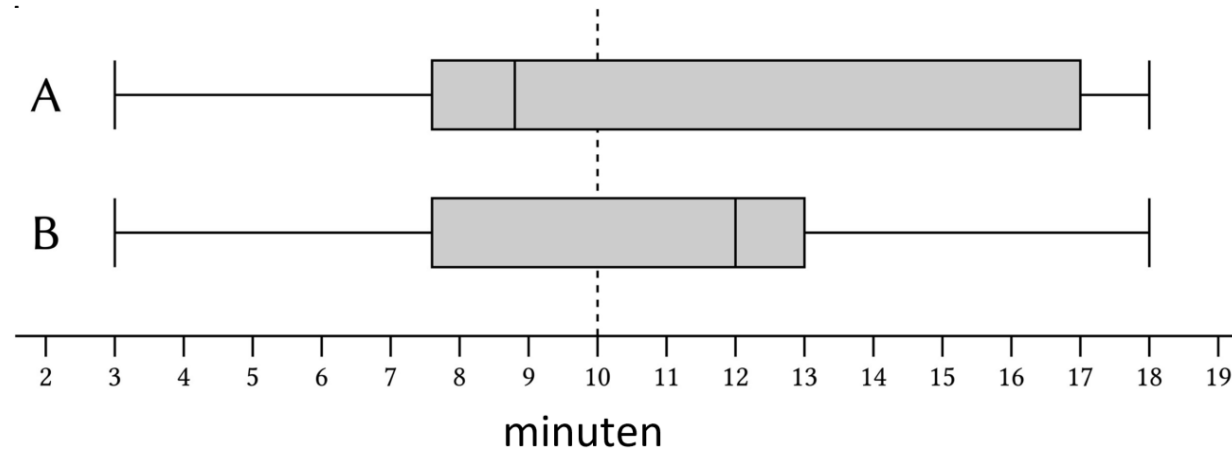
Students task



Co-funded by
the European Union

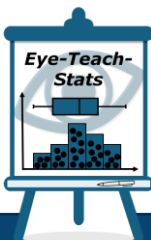
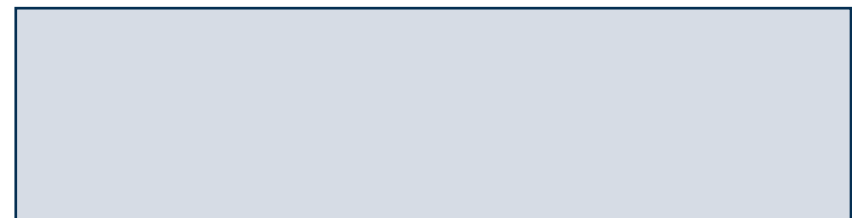
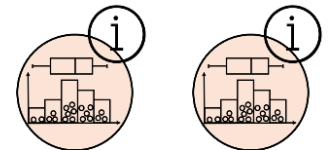
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Twee scholen A en B hebben hetzelfde aantal leerlingen. Alle leerlingen gaven in een enquête aan hoeveel minuten ze 's ochtends wandelen naar school. De resultaten worden weergegeven in twee box plots. In één van de scholen (A of B) zijn er meer leerlingen die 's ochtends langer dan 10 minuten naar school wandelen. Beslis over welke school



Dit is de taak waar Quinn aan werkt.

Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.



Introducing eye-tracking

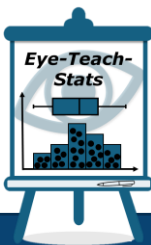


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een oogbewegingsvideo krijgen van je leerling Quinn, die gemaakt werd terwijl hij aan de taak werkte. De oogbewegingsvideo geeft aan waar zijn visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



First look



Co-funded by
the European Union

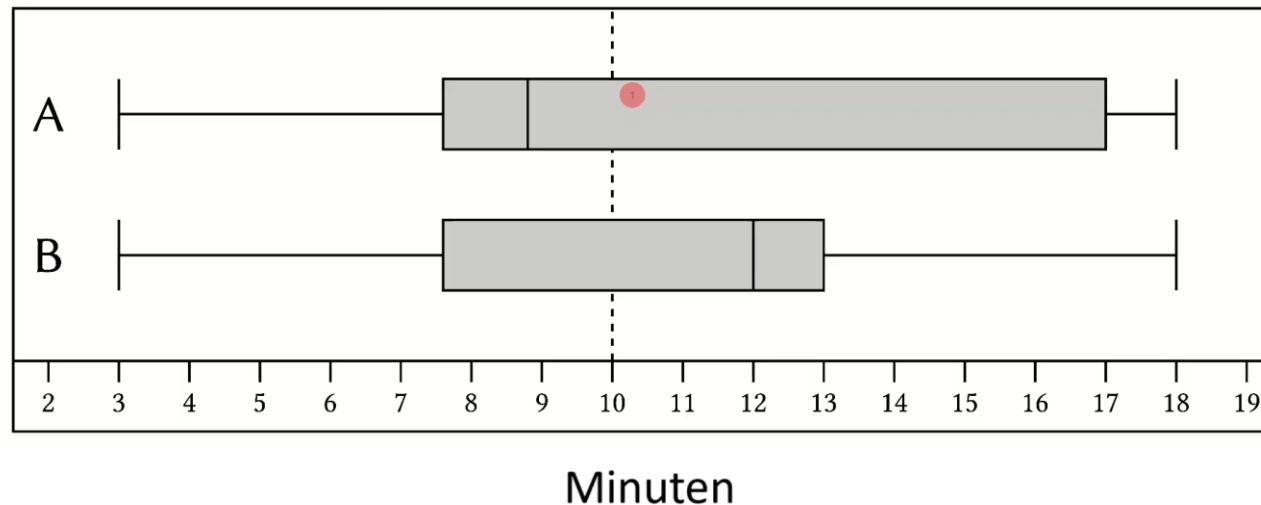
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Quinns antwoord: “Voor mij is School A duidelijk het juiste antwoord. Je kan makkelijk in boxplot A zien dat veel meer leerlingen aangaven dat ze meer dan 10 minuten naar school wandelden.”

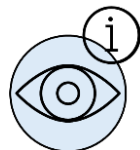
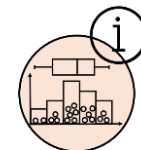
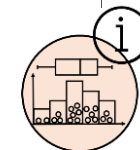
Eén school heeft een groter aantal leerlingen die meer dan 10 minuten naar school moeten lopen. **Bepaal welke school dat is.**

One school has a larger number of children with a walk to school longer than 10 minutes.

Decide which one.



Kijk naar de oogbewegingsvideo die de oogbewegingen van je leerling Quinn toont en naar zijn antwoord.



Take perspective



Co-funded by
the European Union

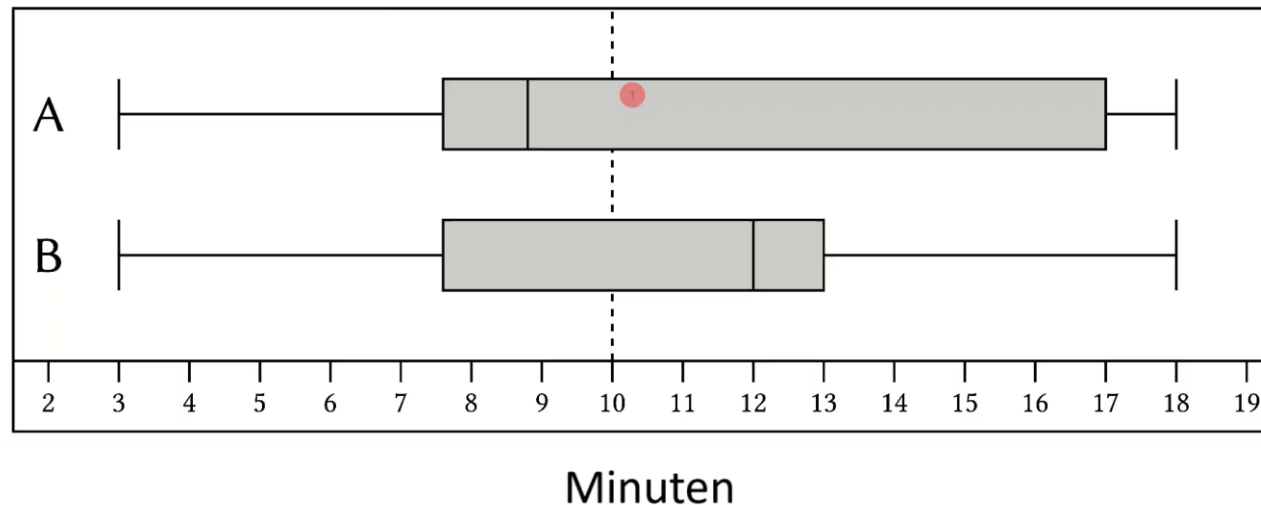
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Quinn's antwoord: "Voor mij is School A duidelijk het juiste antwoord. Je kan makkelijk in boxplot A zien dat veel meer leerlingen aangaven dat ze meer dan 10 minuten naar school wandelden."

Eén school heeft een groter aantal leerlingen die meer dan 10 minuten naar school moeten lopen. **Bepaal welke school dat is.**

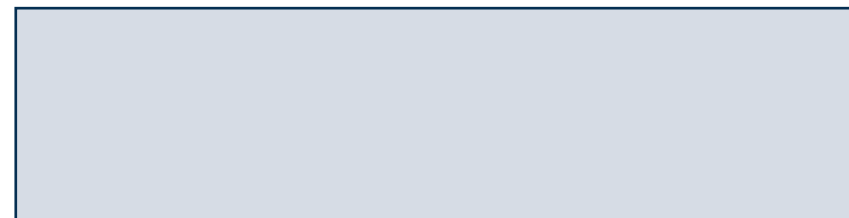
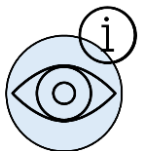
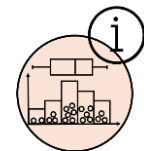
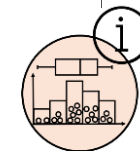
One school has a larger number of children with a walk to school longer than 10 minutes.

Decide which one.



Na de taak werd aan Quinn zijn eigen oogbewegingsvideo getoond. Bij het terugkijken legt hij uit wat hij aan het denken was terwijl hij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Quinn te nemen, en formuleer wat hij gezegd kan hebben.



Indicate assumption



Co-funded by
the European Union

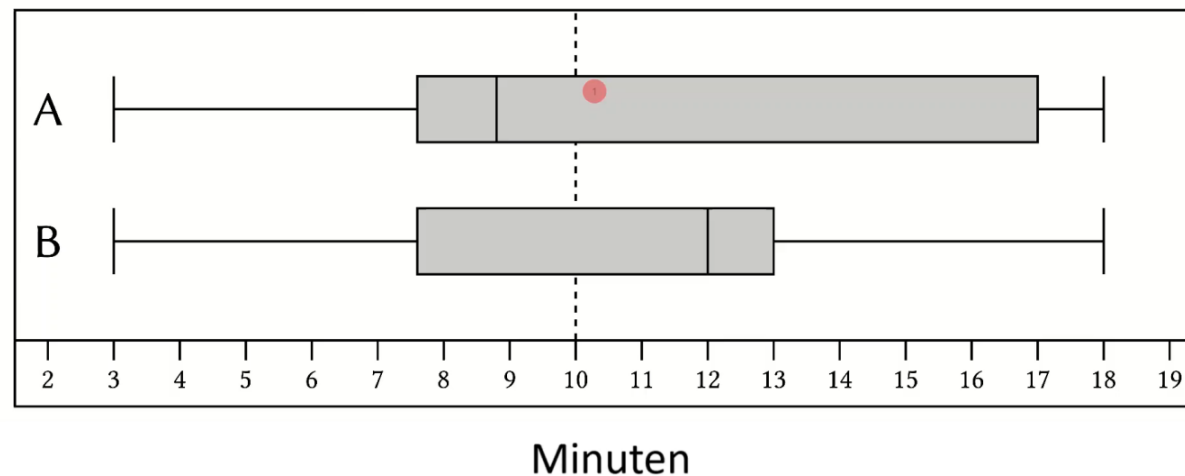
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Quinns commentaar: "De boxplot geeft alle antwoorden weer, om het zo maar even te zeggen. Dus ben ik nagegaan waar er meer van de doos is boven de 10-minutenlimiet. Dat is duidelijk het geval voor boxplot A, dus heb ik ook voor School A gekozen."

Eén school heeft een groter aantal leerlingen die meer dan 10 minuten naar school moeten lopen. **Bepaal welke school dat is.**

One school has a larger number of children with a walk to school longer than 10 minutes.

Decide which one.

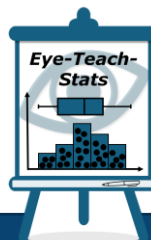
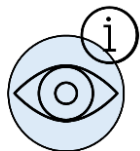
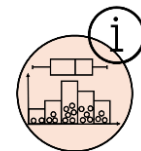
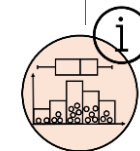


Je kan nu het echte commentaar van Quinn lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.

- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



Evaluate solution



Co-funded by
the European Union

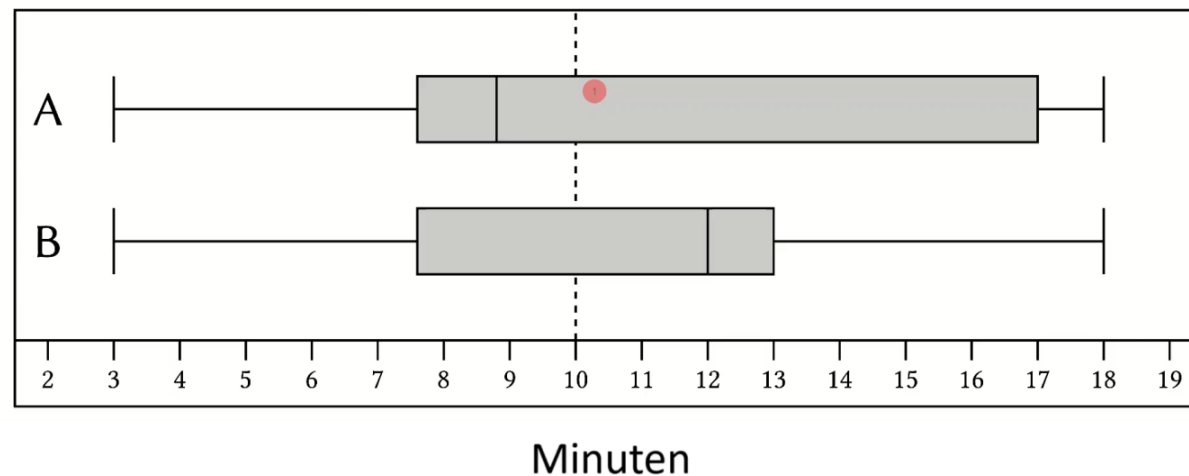
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Quinns commentaar: “De boxplot geeft alle antwoorden weer, om het zo maar even te zeggen. Dus ben ik nagegaan waar er meer van de doos is boven de 10-minutenlimiet. Dat is duidelijk het geval voor boxplot A, dus heb ik ook voor School A gekozen.”

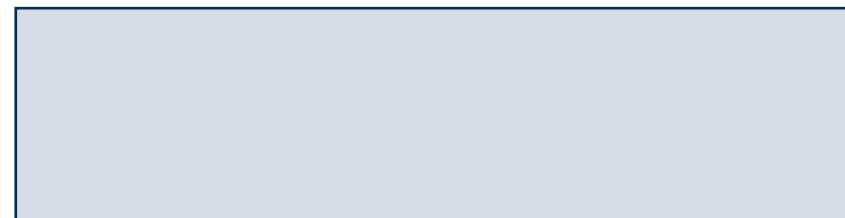
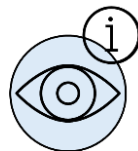
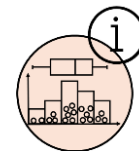
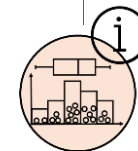
Eén school heeft een groter aantal leerlingen die meer dan 10 minuten naar school moeten lopen. **Bepaal welke school dat is.**

One school has a larger number of children with a walk to school longer than 10 minutes.

Decide which one.



Evalueer Quinns oplossing. Wat kan je zeggen van zijn begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

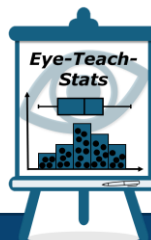
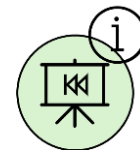
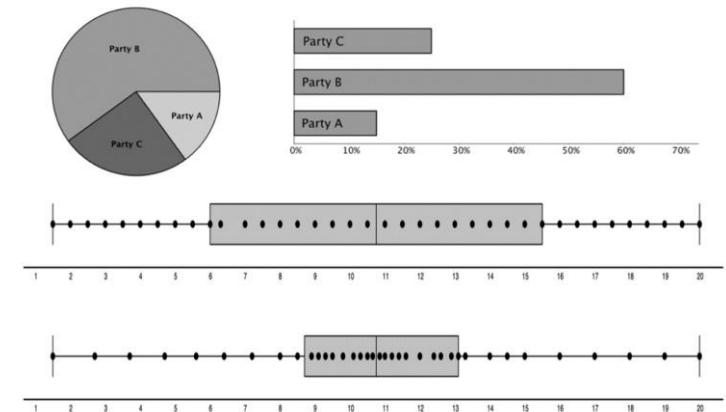
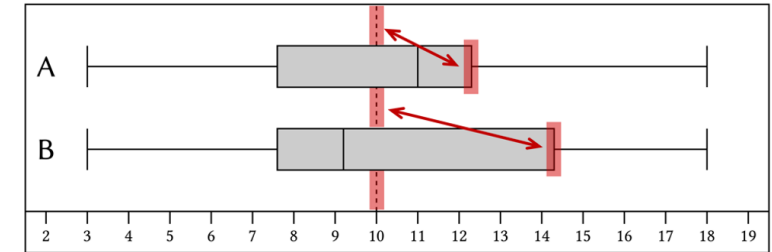
Begrijpen van fouten van leerlingen

Quinn heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid met betrekking tot het interpreteren van boxplots. Die leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd “**oppervlakte-bias**”.

Observeerbaar gedrag: In zijn opmerkingen beschrijft Quinn dat hij (bij de vraag over bij welke van de twee boxplots er meer datapunten boven een bepaalde waarde liggen) een beslissing neemt op basis van welke boxplot meer oppervlakte boven die kritieke waarde heeft. Zijn oogbewegingen tonen een opmerkelijke focus op de derde kwartielen, die de rechtse grens van de boxplot aanduiden.

Interpretatie door de leerkracht / onderzoeker: Een plausibele verklaring voor Quinn's benadering en zijn oogbewegingen is dat hij onterecht aanneemt dat een grotere oppervlakte van de doos ook overeenkomt met een groter aandeel van de voorgestelde steekproef. Quinn's opmerkingen passen bij deze hypothese, maar ook zijn oogbewegingen doen dat, gezien zijn focus op de derde kwartielen, die de hoeveelheid oppervlakte van de doos boven de kritieke waarde aanduiden.

Onderliggende conceptuele moeilijkheid: Wanneer leerlingen voor de eerste keer boxplots ontmoeten, dan zijn ze meestal al goed vertrouwd met andere soorten statistische representaties zoals cirkeldiagrammen of staafdiagrammen. In deze soorten representaties is de aanname van Quinn van een proportioneel verband tussen de oppervlakte en het aandeel van de voorgestelde steekproef correct. Maar dat is niet het geval voor boxplots, omdat de doos altijd de middelste helft van de data weergeeft, en de oppervlakte of de breedte van de doos zijn dus een maat voor de variabiliteit van de dataset, en geeft dus aan hoeveel de middelste helft van de data gespreid is (interkwartielbereik). Als leerlingen onterecht hun voorkennis over statistische representaties transfereren bij het interpreteren van boxplots, dan ontstaat de systematische fout die je net hebt geobserveerd bij je leerling Quinn.

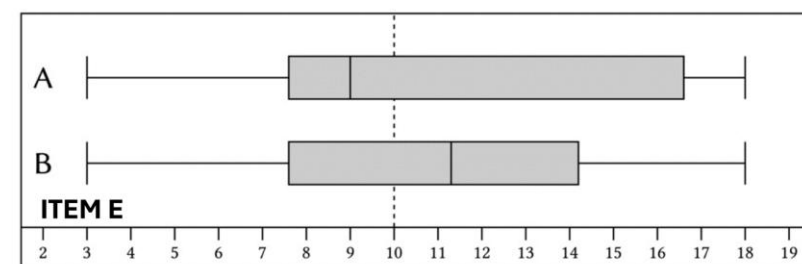
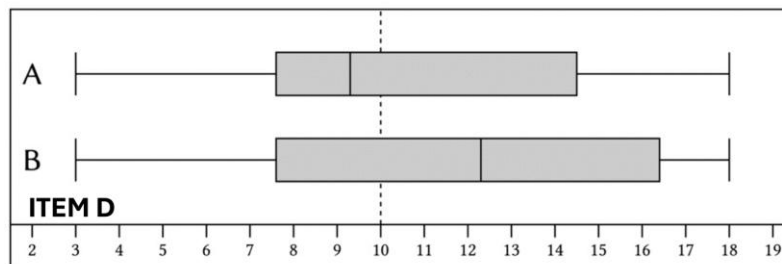
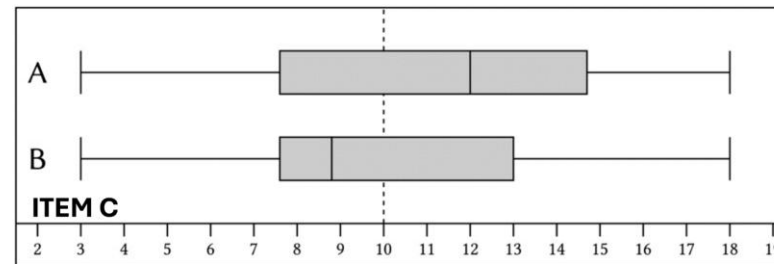
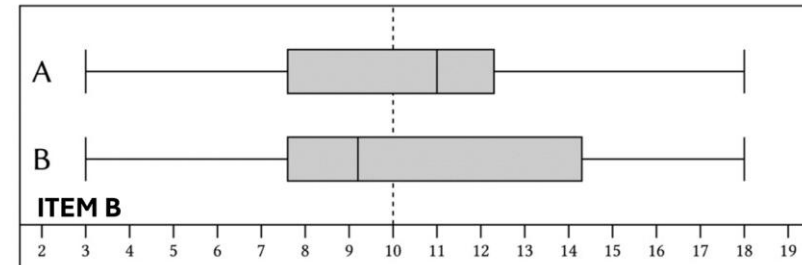
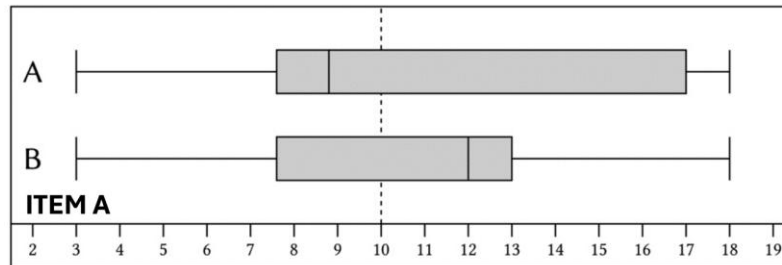


Practice



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.



Welke van de volgende opgaven (de taak en de vraag zijn dezelfde) zou een leerling met conceptuele moeilijkheden fout beantwoorden?

☐ A

☐ B

☐ C

☐ D

☐ E

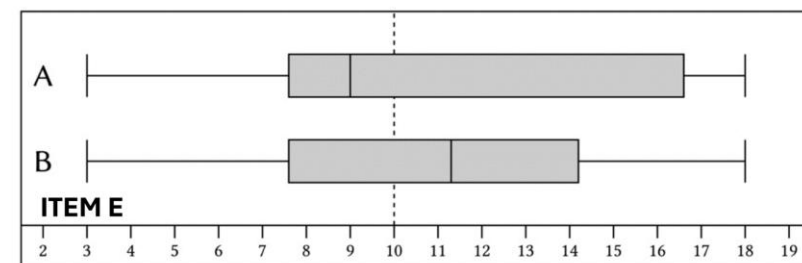
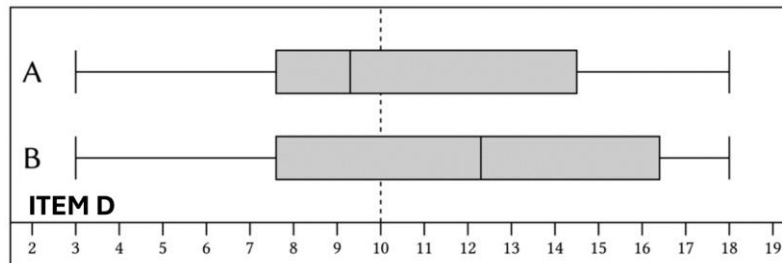
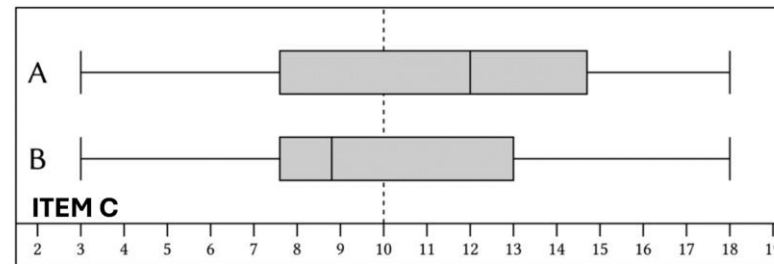
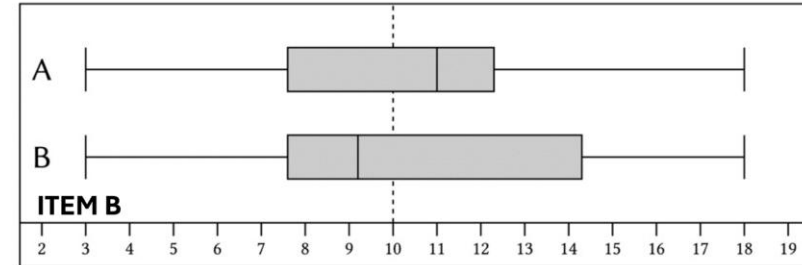
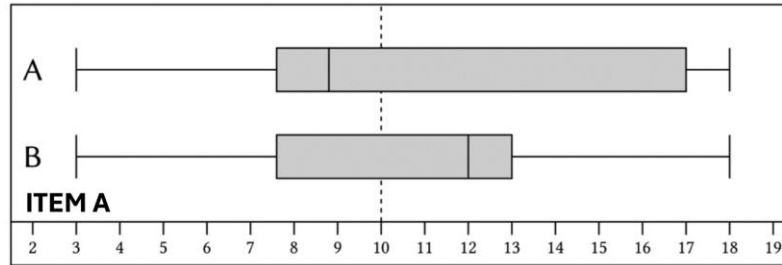


Practice II



Co-funded by
the European Union

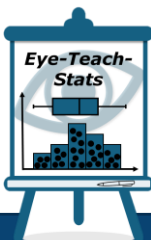
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.



Voor dezelfde opgaven zie je nu het oogbewegingspatroon van vijf verschillende leerlingen.

Welke van deze vijf verschillende leerlingen heeft volgens jou waarschijnlijk een fout antwoord gegeven?

- ☐ Student A
- ☐ Student B
- ☐ Student C
- ☐ Student D
- ☐ Student E



Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the National Agency. Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

03 Boxplot

Vignette over een fout op basis van een mediaan-bias

Introducing situation



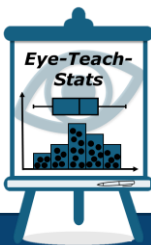
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 2de jaar secundair onderwijs / tweede klas over data-interpretatie. Je leidt leerlingen in in het vergelijken van de verdelingen van data via boxplots.

Je ziet dat een van je leerlingen, Elodie, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Zij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Elodie aan werkt.



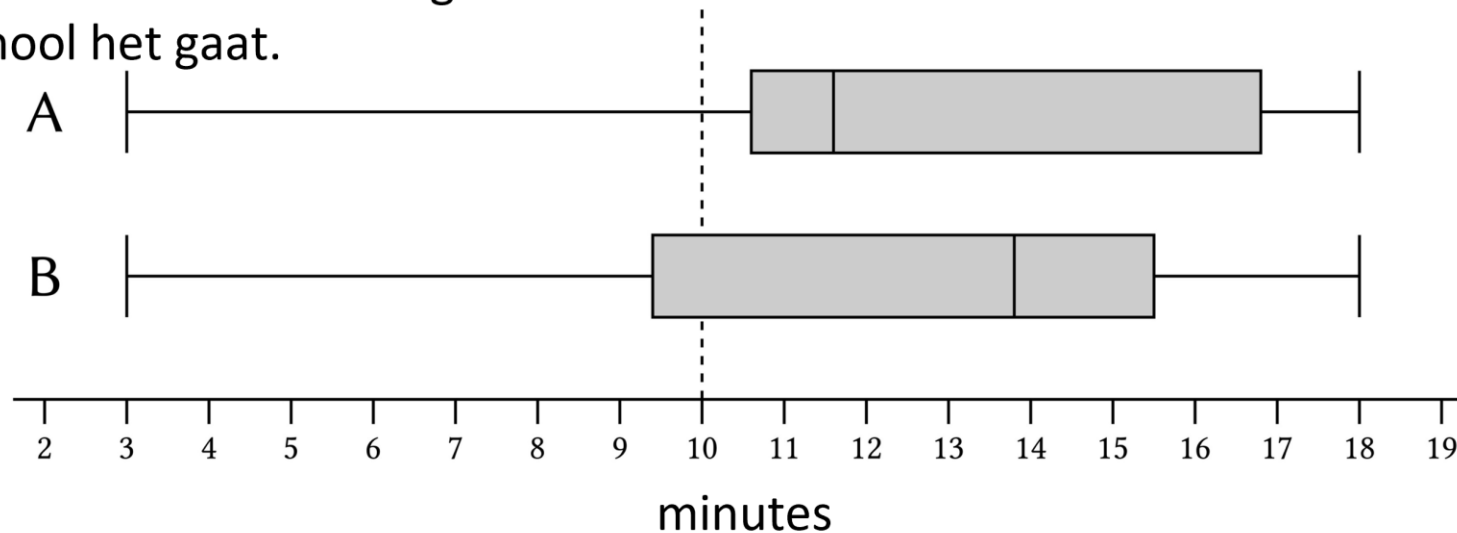
Students task



Co-funded by
the European Union

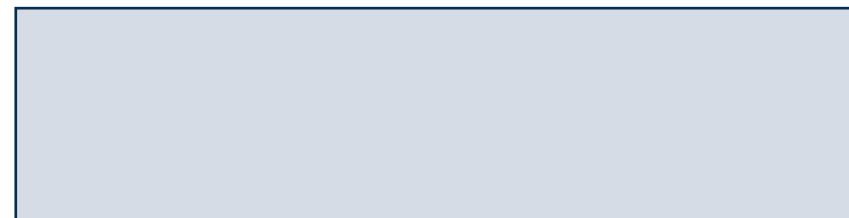
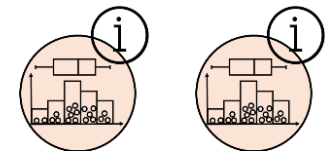
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Twee scholen A en B hebben hetzelfde aantal leerlingen. Alle leerlingen gaven in een enquête aan hoeveel minuten ze 's ochtends wandelen naar school. De resultaten worden weergegeven in twee box plots. In één van de scholen (A of B) zijn er meer leerlingen die 's ochtends langer dan 10 minuten naar school wandelen. Beslis over welke school het gaat.



Dit is de taak waar Elodie aan werkt.

Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.



Introducing eye-tracking

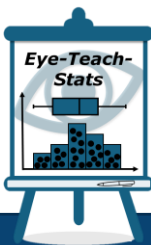


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een hittemap krijgen van je leerling Elodie, die gemaakt werd terwijl zij aan de taak werkte. De hittemap geeft aan waar haar visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



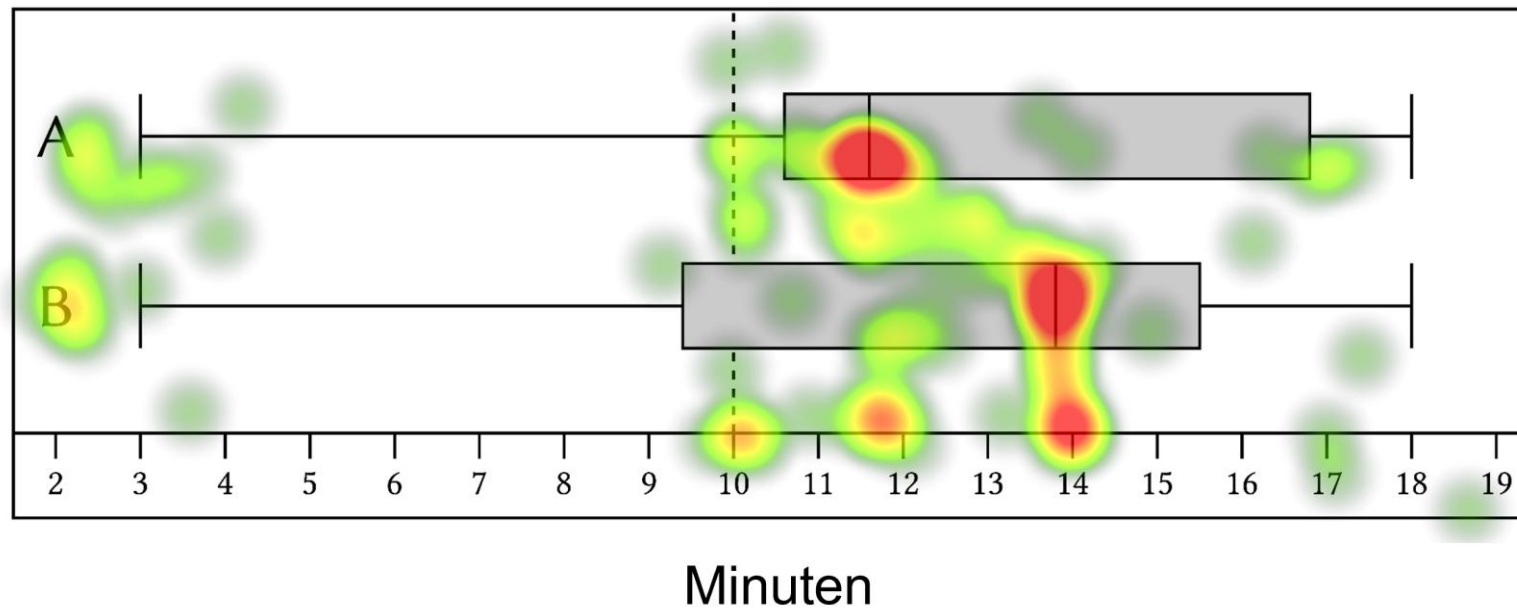
First look



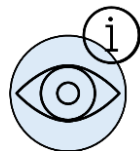
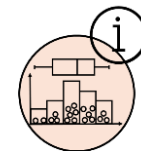
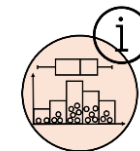
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Elodies antwoord: “Voor mij is School B duidelijk het juiste antwoord. Je kan makkelijk in boxplot B zien dat veel meer leerlingen aangaven dat ze meer dan 10 minuten naar school wandelden.”



Kijk naar de hittemap die de oogbewegingen van je leerling Elodie toont en naar haar antwoord.



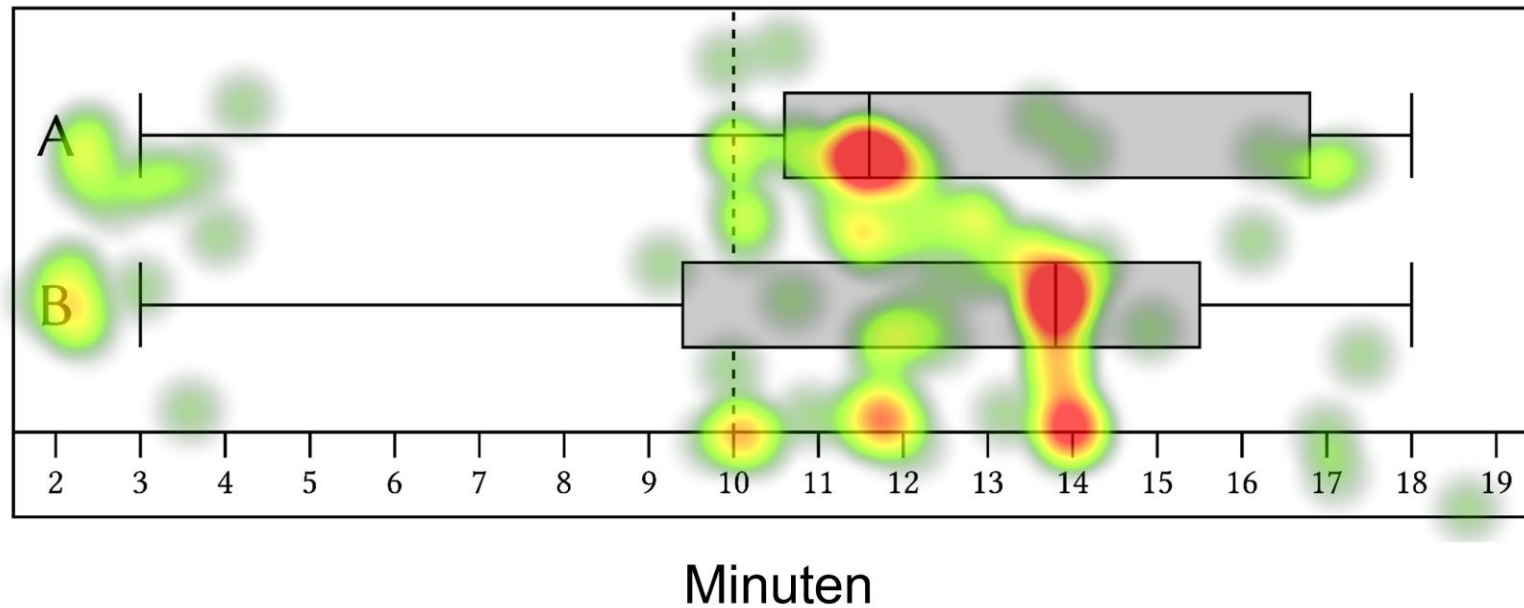
Take perspective



Co-funded by
the European Union

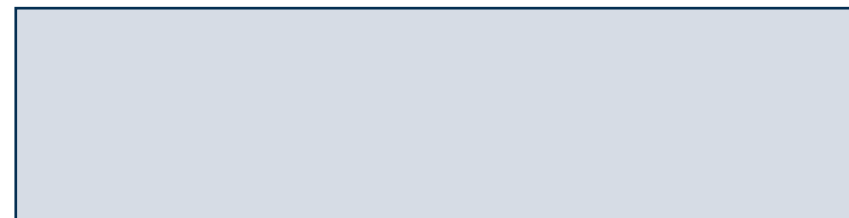
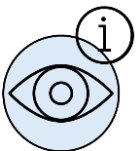
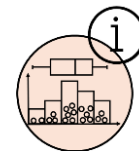
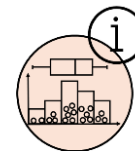
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Elodies antwoord: “Voor mij is School B duidelijk het juiste antwoord. Je kan makkelijk in boxplot B zien dat veel meer leerlingen aangaven dat ze meer dan 10 minuten naar school wandelden.”



Na de taak werd aan Elodie haar eigen hittemap getoond. Bij het terugkijken legt zij uit wat zij aan het denken was terwijl zij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Elodie te nemen, en formuleer wat zij gezegd kan hebben.



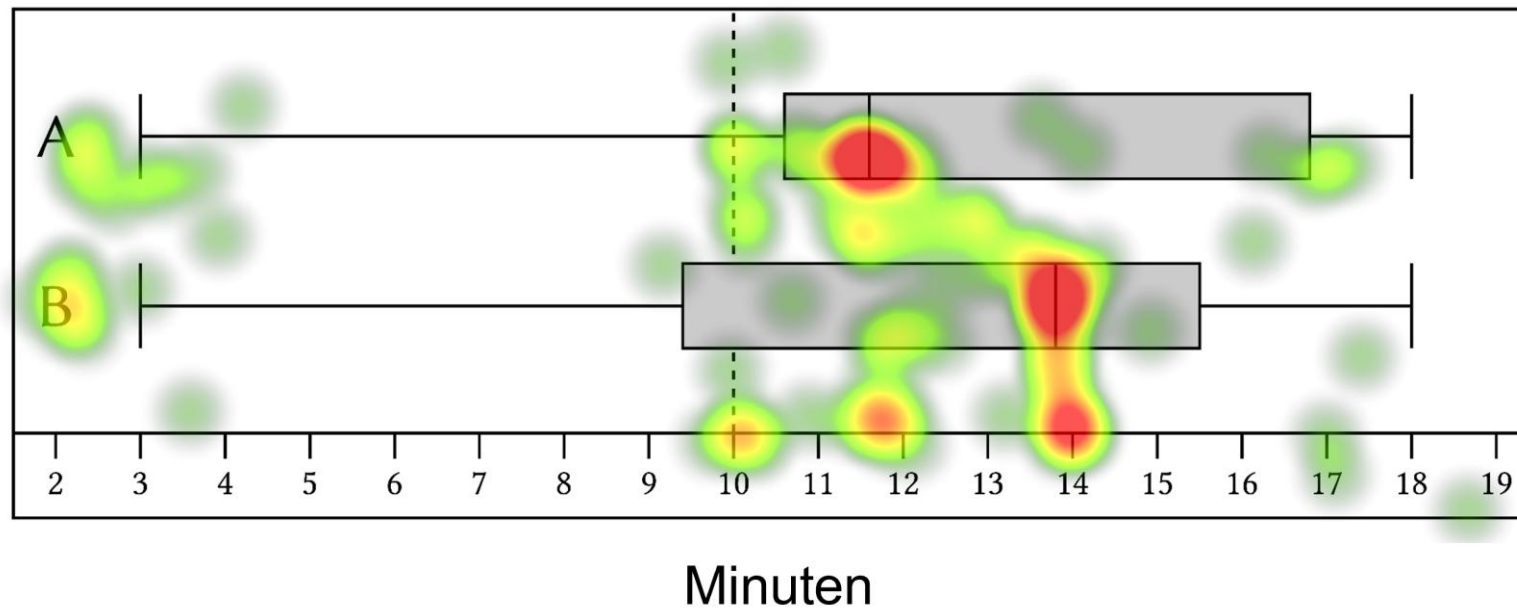
Indicate assumption



Co-funded by
the European Union

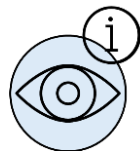
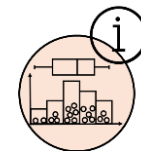
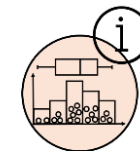
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Elodies commentaar: “De lijn in het midden van de doos is de mediaan, die een gemiddelde waarde is. Dus ik heb vooral de twee medianen vergeleken. Je kan duidelijk zien dat de leerlingen van school B er gemiddeld veel langer over doen om naar school te wandelen dan die van school A. Dus koos ik school B.”



Je kan nu het echte commentaar van Elodie lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.



- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



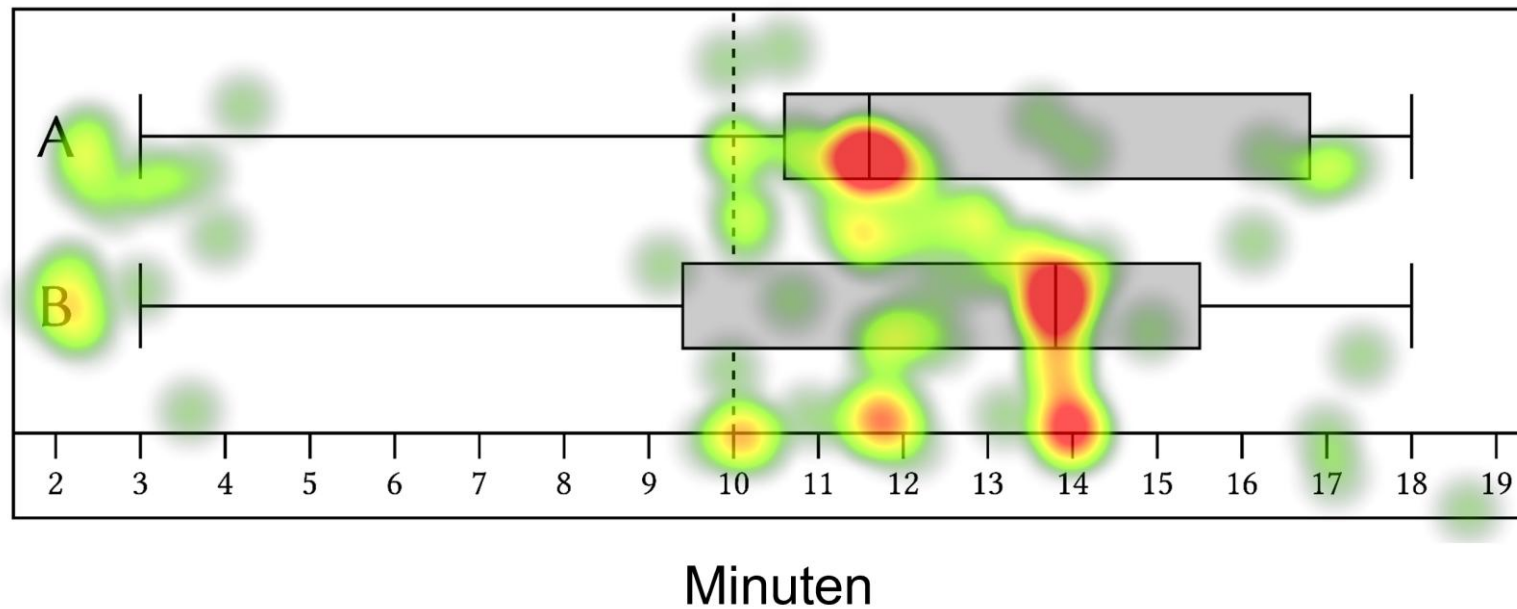
Evaluate solution



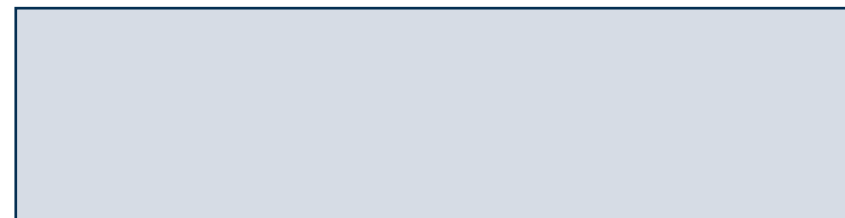
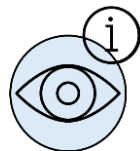
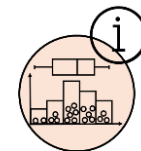
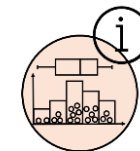
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Elodies commentaar: "De lijn in het midden van de doos is de mediaan, die een gemiddelde waarde is. Dus ik heb vooral de twee medianen vergeleken. Je kan duidelijk zien dat de leerlingen van school B er gemiddeld veel langer over doen om naar school te wandelen dan die van school A. Dus koos ik school B."



Evalueer Elodies oplossing. Wat kan je zeggen van haar begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

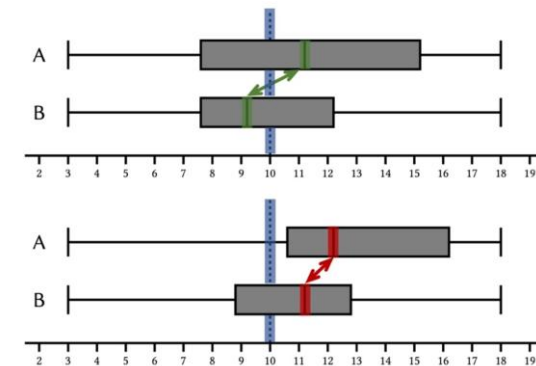
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Begrijpen van fouten van leerlingen

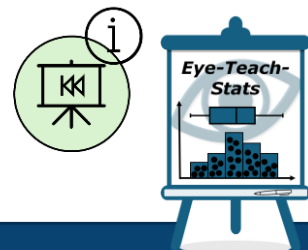
Elodie heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid met betrekking tot het interpreteren van boxplots. Die leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd “mediaan bias”.

Observeerbaar gedrag: In haar opmerkingen beschrijft Elodie dat zij (bij de vraag over welke van de twee boxplots meer datapunten boven een bepaalde waarde liggen) een beslissing neemt op basis van welke boxplot een hogere mediaan heeft. Haar oogbewegingen tonen ook een opmerkelijke focus op de twee medianen.

Interpretatie door de leerkracht / onderzoeker: Een plausibele verklaring voor de benadering van Elodie en voor haar oogbewegingen is dat ze de mediaan niet interpreteert als de specifieke grenswaarde die aangeeft waar de grens is tussen de bovenste en onderste helft van de data, maar ze gebruikt de mediaan om te beslissen welke van de twee verdelingen eerder hoge waarden heeft, en ze gebruikt deze maat voor de centrale tendens om haar beslissing te nemen. Haar oogbewegingen – die aangeven dat ze de twee medianen direct met elkaar vergelijkt en niet in hun positie ten opzichte van de kritieke waarde – passen bij deze aanname.



Onderliggende conceptuele moeilijkheid: Wanneer leerlingen voor het eerst boxplots ontmoeten, dan zijn ze gewoonlijk al vertrouwd met verschillende centrummaten zoals de mediaan. Centrummaten zijn niet alleen vertrouwd vanuit schoolcontexten; ze komen ook voor in verschillende contexten buiten school. Als leerlingen de (goed gekende) mediaan zien in de boxplot representatie, dan is het plausibel om aan te nemen dat ze die vertrouwde parameter gebruiken om een beslissing te nemen, vooral wanneer ze nog geen specifieke kennis over de boxplot hebben verworven die nodig is om tot de juiste oplossing te komen. Deze overgeneralisatie van de mediaan leidt dan tot de systematische fout die je net hebt vastgesteld bij je leerling Elodie.

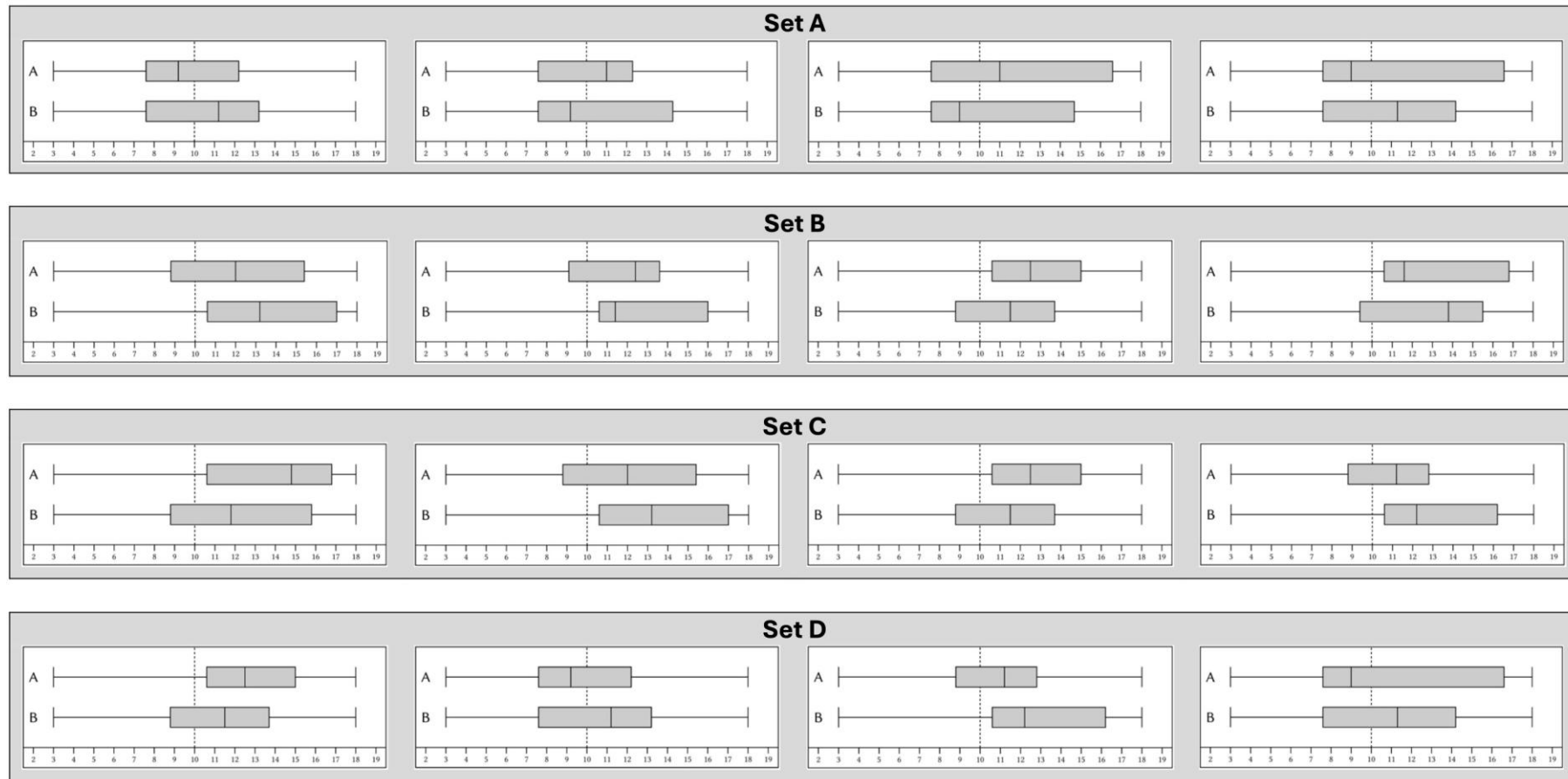


Practice



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.



Stel dat je vermoedt dat je leerlingen de eerder beschreven conceptuele moeilijkheden hebben.

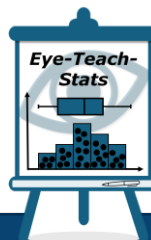
Welke van de volgende opgavensets zou je je leerlingen laten oplossen om hier zeker van te zijn?

☐ Set A

☐ Set B

☐ Set C

☐ Set D

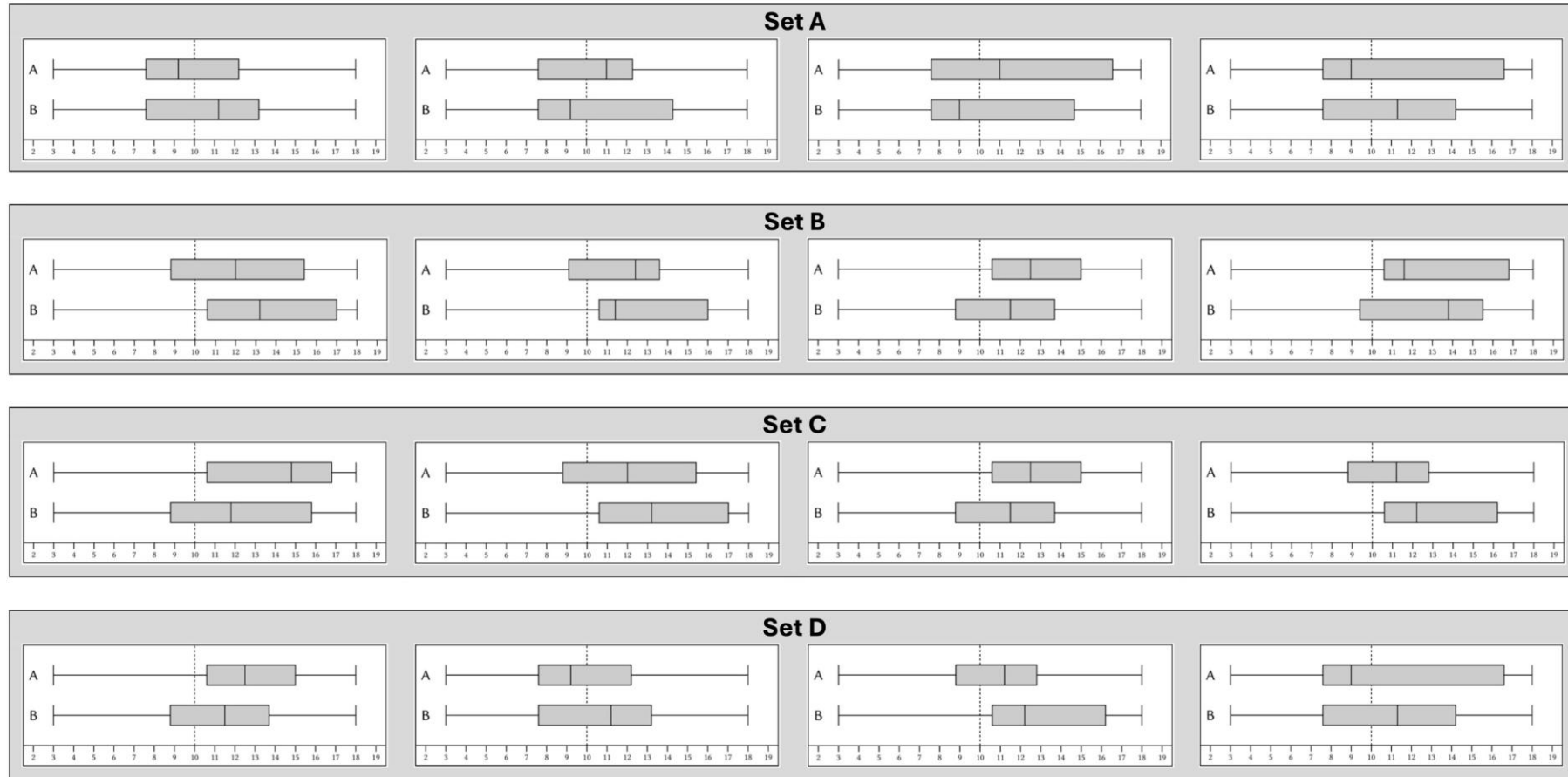


Practice II



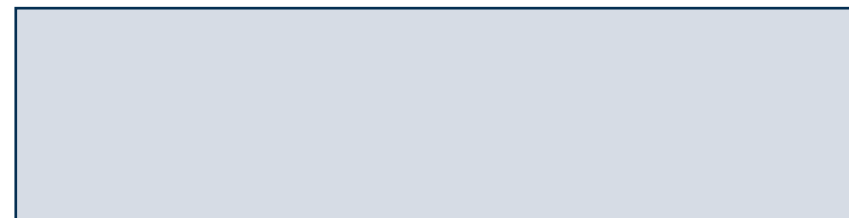
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.



Stel dat je vermoedt dat je leerlingen de eerder beschreven conceptuele moeilijkheden hebben. Welke van de volgende opgavensets zou je je leerlingen laten oplossen om hier zeker van te zijn?

Verantwoord uitgebreid waarom je a) opgavenset [xy] hebt gekozen, en b) niet voor de andere opgavensets hebt gekozen.



Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the National Agency. Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

04 Case-Value Plot

Vignette over een fout op basis van een overgeneralisatie
van een histogrambenadering

Introducing situation



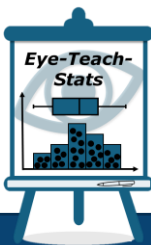
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 4de jaar secundair onderwijs / vierde klas over data-interpretatie. Je leidt leerlingen in in het vergelijken van de verdelingen van data via casus-staafdiagrammen.

Je ziet dat een van je leerlingen, Roos, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Zij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Roos aan werkt.

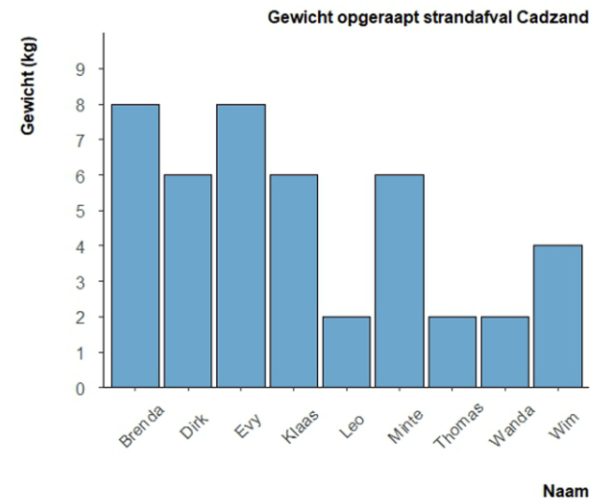
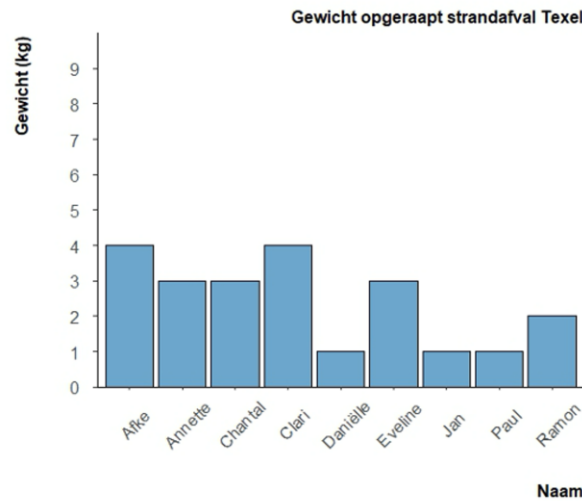


Students task



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

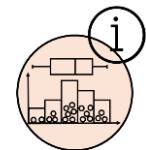


Op welk strand is het gemiddelde gewicht van het verzamelde afval groter?

- a) Het gemiddelde gewicht is het hoogst op Texel.
- b) Het gemiddelde gewicht is het hoogst op Cadzand.
- c) Het gemiddelde gewicht is voor beide ongeveer hetzelfde.

Dit is de taak waar Roos aan werkt. **Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.**

- a) Het gemiddelde gewicht is het hoogste op Texel.
- b) Het gemiddelde gewicht is het hoogste op Cadzand.
- c) Het gemiddelde gewicht is voor beide ongeveer hetzelfde.



Introducing eye-tracking

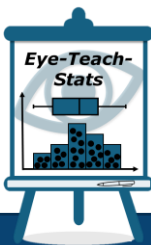


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een oogbewegingsvideo krijgen van je leerling Roos, die gemaakt werd terwijl zij aan de taak werkte. De oogbewegingsvideo geeft aan waar haar visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



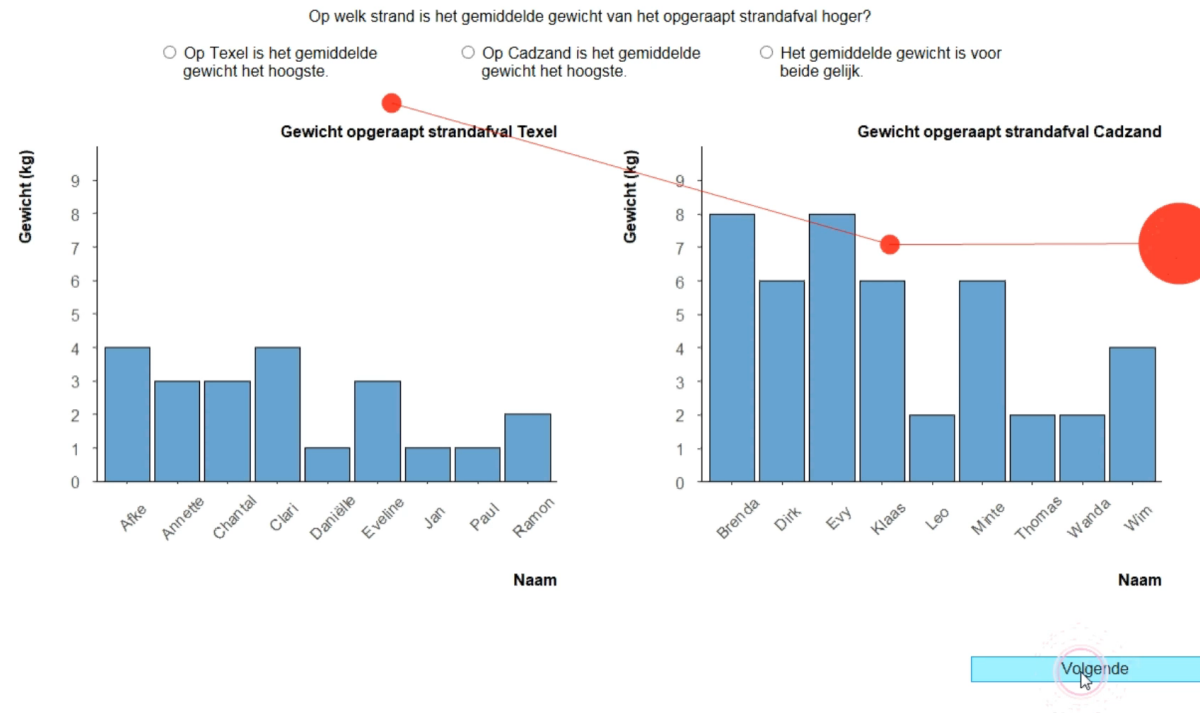
First look



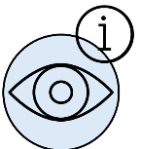
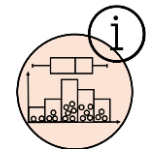
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Roos' antwoord: "Het gemiddelde gewicht is voor beide ongeveer hetzelfde."



Kijk naar de oogbewegingsvideo die de oogbewegingen van je leerling Roos toont en naar haar antwoord.



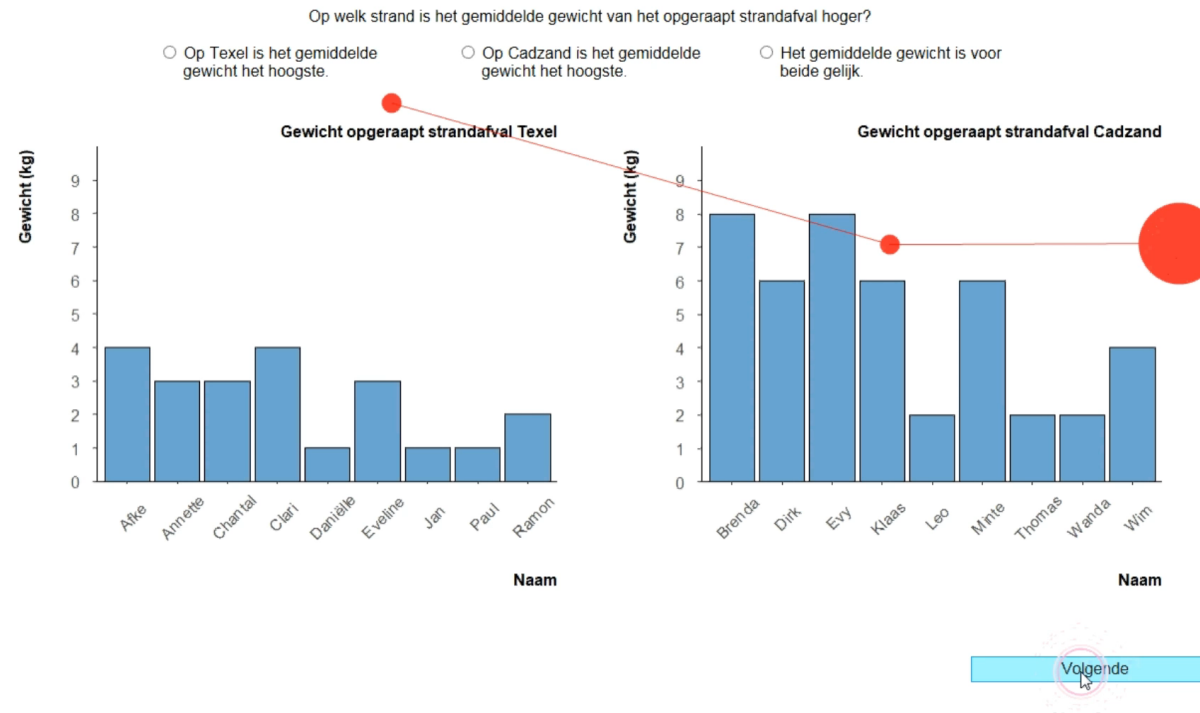
Take perspective



Co-funded by
the European Union

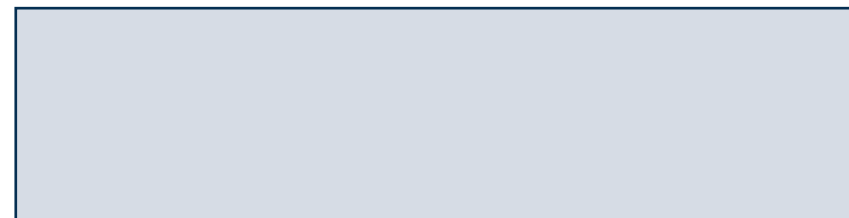
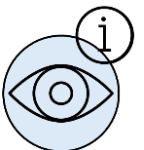
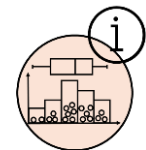
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Roos' antwoord: "Het gemiddelde gewicht is voor beide ongeveer hetzelfde."



Na de taak werd aan Roos haar eigen oogbewegingsvideo getoond. Bij het terugkijken legt zij uit wat zij aan het denken was terwijl zij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Roos te nemen, en formuleer wat zij gezegd kan hebben.



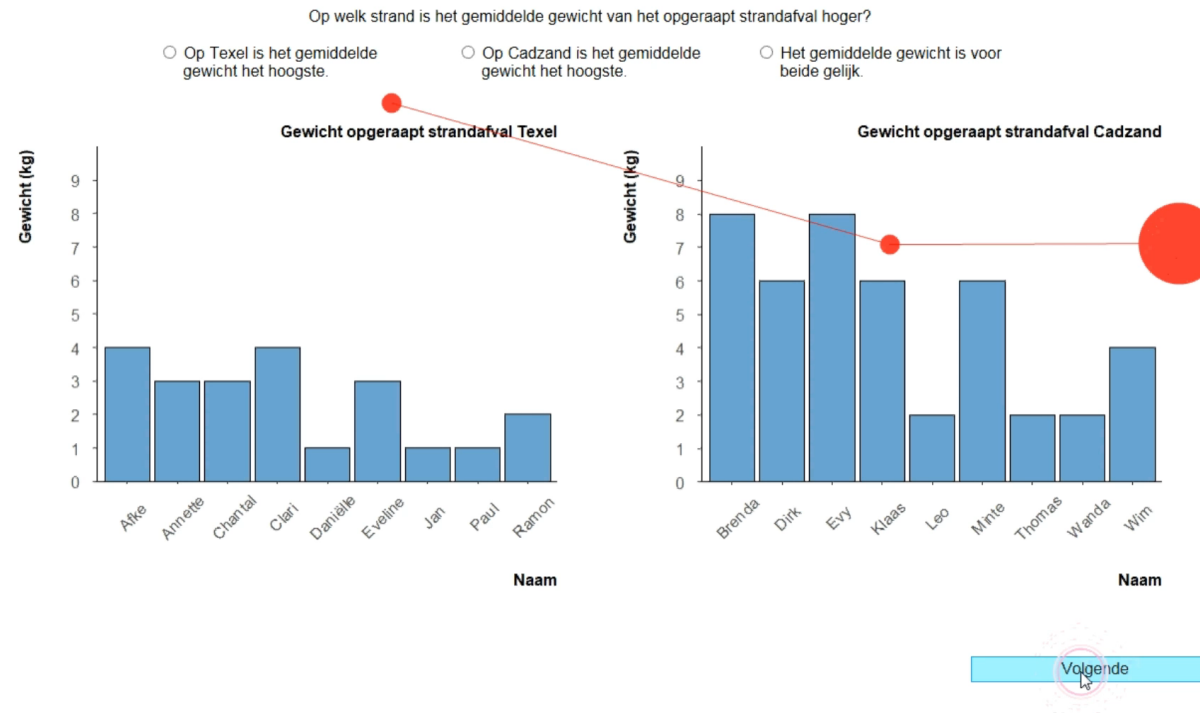
Indicate assumption



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Roos' commentaar: "Ik dacht dat de gemiddelden hetzelfde waren omdat ik keek naar de gewichten in beide grafieken. Wanneer ik zag dat de gewichten in één grafiek twee keer zo hoog waren, bedacht ik me dat het patroon hetzelfde was maar met hogere waarden. Dus dacht ik dat de gewichten nog steeds hetzelfde zouden zijn."

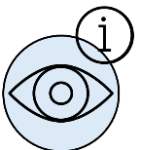
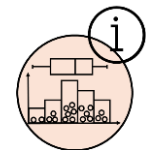


Je kan nu het echte commentaar van Roos lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.

- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



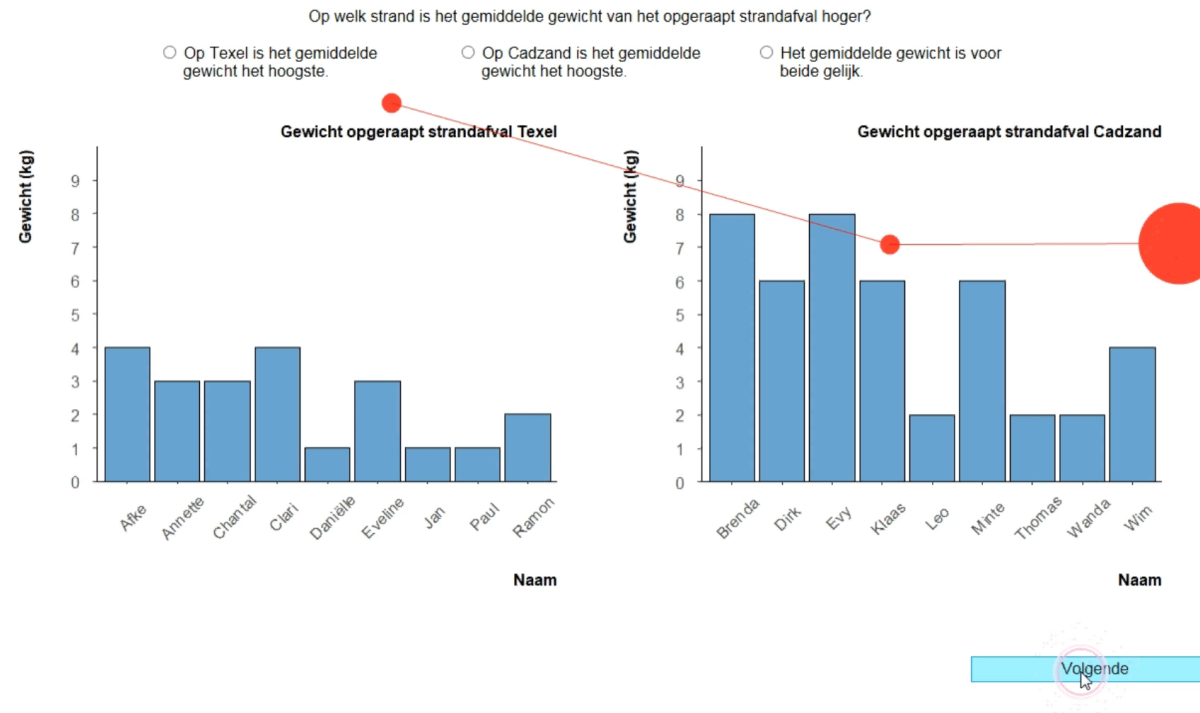
Evaluate solution



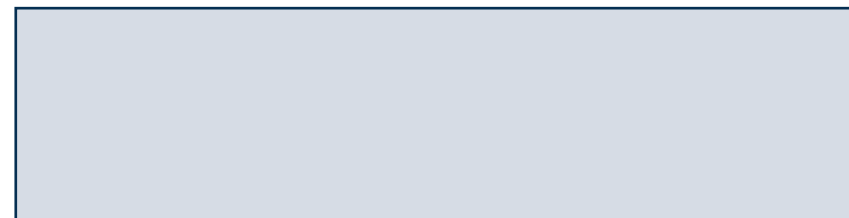
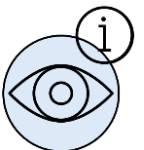
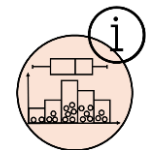
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Roos' commentaar: "Ik dacht dat de gemiddelden hetzelfde waren omdat ik keek naar de gewichten in beide grafieken. Wanneer ik zag dat de gewichten in één grafiek twee keer zo hoog waren, bedacht ik me dat het patroon hetzelfde was maar met hogere waarden. Dus dacht ik dat de gewichten nog steeds hetzelfde zouden zijn."



Evalueer Roos' oplossing. Wat kan je zeggen van haar begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Begrijpen van fouten van leerlingen

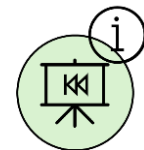
Roos heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid bij het interpreteren van casus-staafdiagrammen. Dit leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd het “**overgeneralisatie van een histogrambenadering**”.

Observeerbaar gedrag: Roos zei dat de waarden in één casus-staafdiagram verdubbeld waren ten opzichte van de andere maar dat het patroon hetzelfde was. Ze interpreteerde deze verdubbeling als een indicatie van gelijkaardige verdelingen, en daardoor gelijkaardige gemiddelden. Haar oogbewegingspatronen tonen dat Roos focuste op de visuele gelijkenis en gelijke staven in de casus-staafdiagrammen. Alles samengenomen wijst dit gedrag op een systematische fout, die we de overgeneralisatie van een histogrambenadering bij het interpreteren van casus-staafdiagrammen noemen.

Interpretatie door de leerkracht/onderzoeker: Het lijkt er op dat Roos een redenering toepast die typisch gebruikt wordt voor histogrammen—het visueel beoordelen van de hoogte van staven en de vorm van de verdeling – en ze interpreteert de schijnbare verdubbeling als een verdubbeling in frequenties. Zo’n benadering is gepast voor histogrammen, die geaggregeerde data voorstellen in intervallen. Maar ze werd hier onterecht getransfereerd naar casus-staafdiagrammen waar elke staaf maar één individueel datapunt voorstelt.

Onderliggende conceptuele moeilijkheid: De systematische fout is wellicht te wijten aan een onderliggende conceptuele moeilijkheid met betrekking tot het concept verdeling en het concept centrum, en daardoor in het begrijpen hoe het gemiddelde wordt bepaald en vergeleken in casus-staafdiagrammen. In een casus-staafdiagram plot betekent het veranderen van de hoogte van een staaf het veranderen van een gemeten waarde, die op zijn beurt het gemiddelde beïnvloedt. In histogrammen verandert het verdubbelen van alle staven (frequenties) het gemiddelde niet, omdat de algemene verdeling dezelfde blijft, en bijgevolg de balans, dus het gemiddelde, hetzelfde blijft.

Alternatieve strategieën en correcte benaderingen voor casus-staafdiagrammen: Er zijn verschillende manieren waarop leerlingen casus-staafdiagrammen kunnen benaderen. Sommige leerlingen gebruiken bijvoorbeeld “oppervlakte” als een benadering om het gemiddelde te schatten (meer oppervlakte betekent een hoger gemiddelde). Hoewel dit correct kan zijn in veel casus-staafdiagrammen, is het een onvolledige strategie (bijvoorbeeld wanneer er meer datapunten in één grafiek zijn dan in een andere). Een correcte methode om het gemiddelde te schatten in casus-staafdiagrammen bestaat erin om in te zien dat de hoogte van elke staaf de gemeten waarde is. Het schatten van het gemiddelde kan dan bijvoorbeeld gebeuren door visueel een horizontale lijn te tekenen die alle staven ongeveer even hoog maakt. In histogrammen stellen de staafhoogten frequenties voor, en het balanspunt van de grafiek op de horizontale as is ongeveer het gemiddelde.

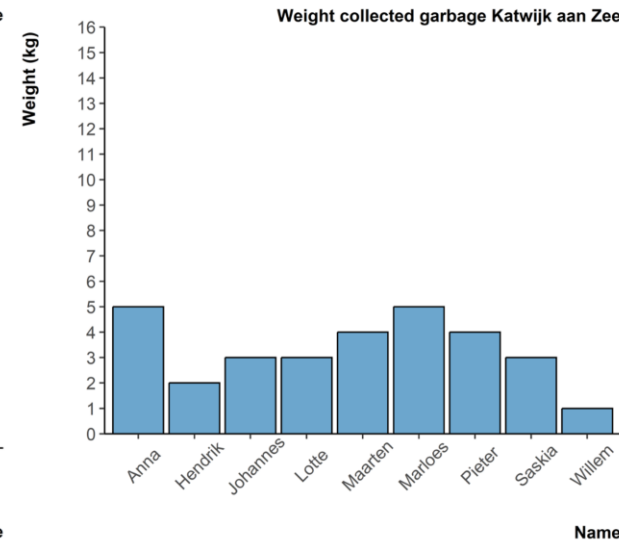
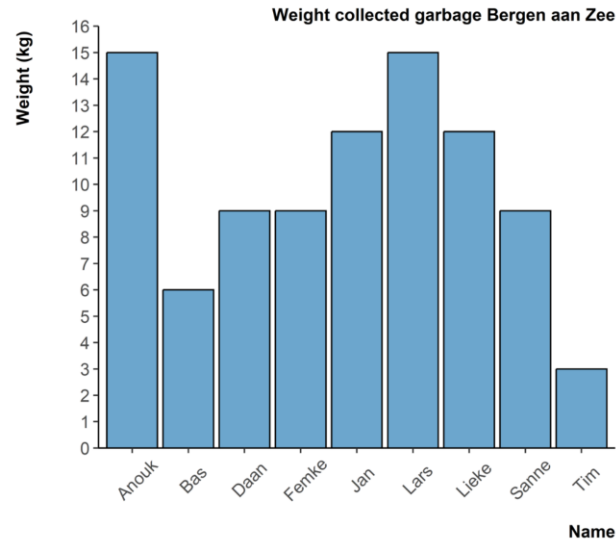


Practice



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

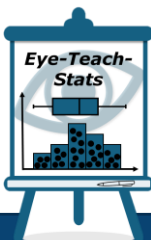
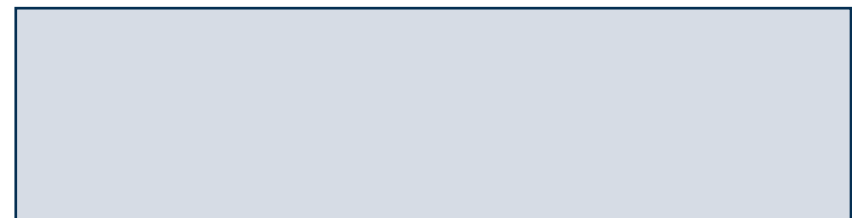


Op welk strand is het gemiddelde gewicht van het verzamelde afval groter?

- a) Het gemiddelde gewicht is het hoogst op Texel.
- b) Het gemiddelde gewicht is het hoogst op Cadzand.
- c) Het gemiddelde gewicht is voor beide ongeveer hetzelfde.

Stel je voor dat een leerling dezelfde systematische fout maakt en een histogrambenadering toepast op casus-staafdiagrammen.

Beschrijf het mogelijke oogbewegingspatroon dat de leerling zou kunnen vertonen. Verwacht je dat deze fout hier optreedt? Waarom (niet)?



Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the National Agency. Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

05 Case-Value Plot

Vignette over een fout op basis van een overgeneralisatie
van een histogrambenadering

Introducing situation



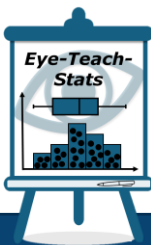
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 4de jaar secundair onderwijs / vierde klas over data-interpretatie. Je leidt leerlingen in in het vergelijken van de verdelingen van data via casus-staafdiagrammen.

Je ziet dat een van je leerlingen, Aline, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Zij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Aline aan werkt.

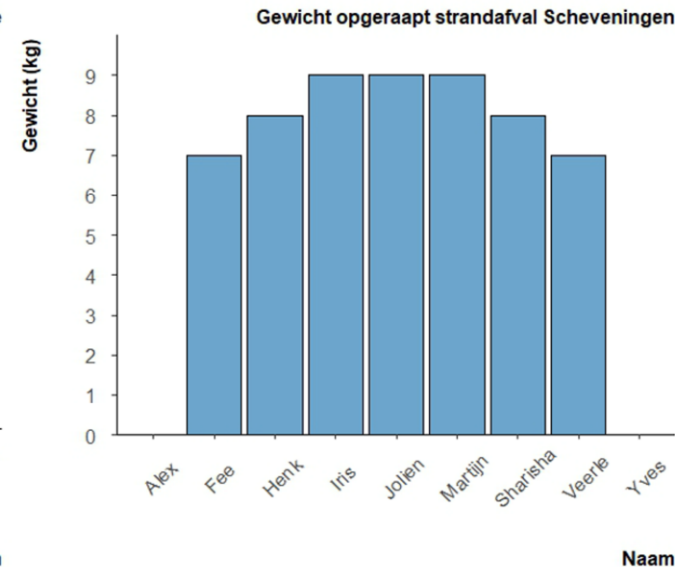
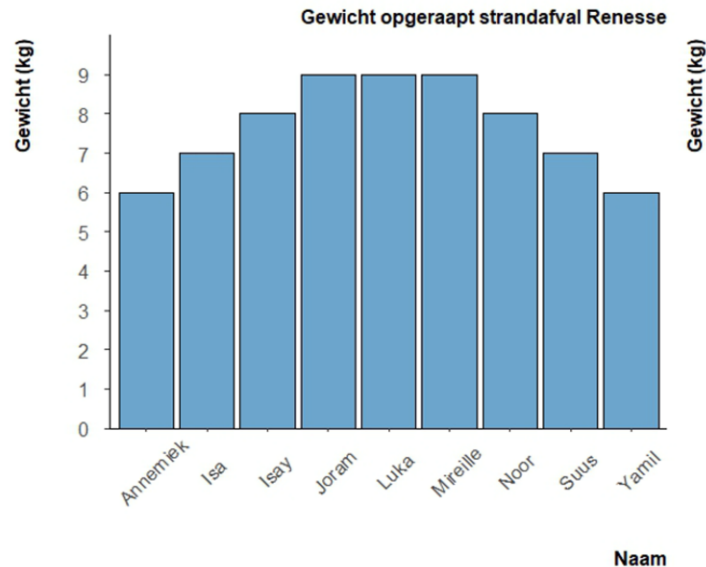


Students task



Co-funded by
the European Union

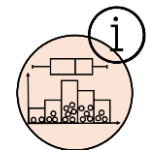
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.



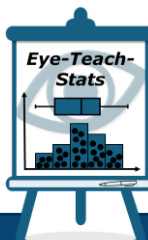
Op welk strand is het gemiddelde gewicht van het verzamelde afval groter?

- a) Het gemiddelde gewicht is het hoogst op Renesse.
- b) Het gemiddelde gewicht is het hoogst op Scheveningen.
- c) Het gemiddelde gewicht is voor beide ongeveer hetzelfde.

Dit is de taak waar Aline aan werkt. Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.



- a) Het gemiddelde gewicht is het hoogste op Renesse .
- b) Het gemiddelde gewicht is het hoogste op Scheveningen .
- c) Het gemiddelde gewicht is voor beide ongeveer hetzelfde.



Introducing eye-tracking

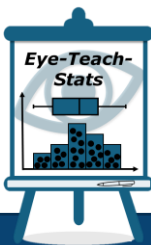


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een oogbewegingsvideo krijgen van je leerling Aline, die gemaakt werd terwijl zij aan de taak werkte. De oogbewegingsvideo geeft aan waar haar visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



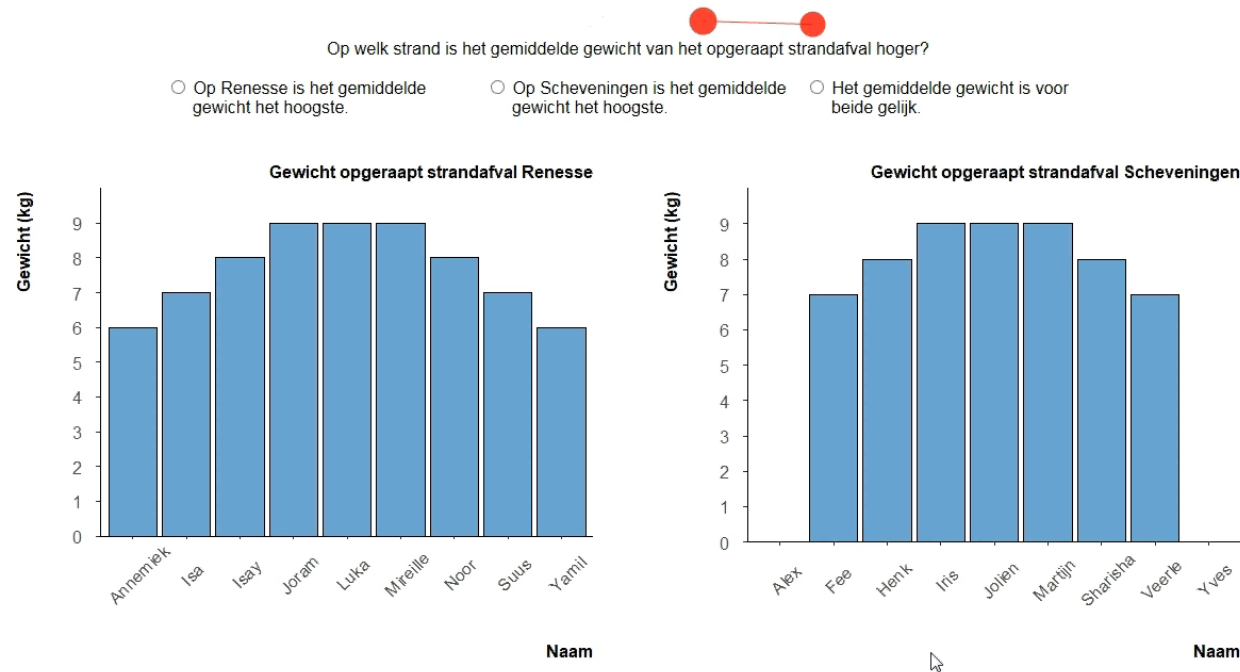
First look



Co-funded by
the European Union

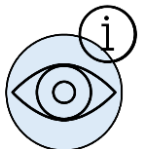
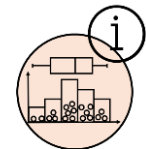
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Alines antwoord: "Het gemiddelde gewicht is voor beide ongeveer hetzelfde."



Volgende

Kijk naar de oogbewegingsvideo die de oogbewegingen van je leerling Aline toont en naar haar antwoord.



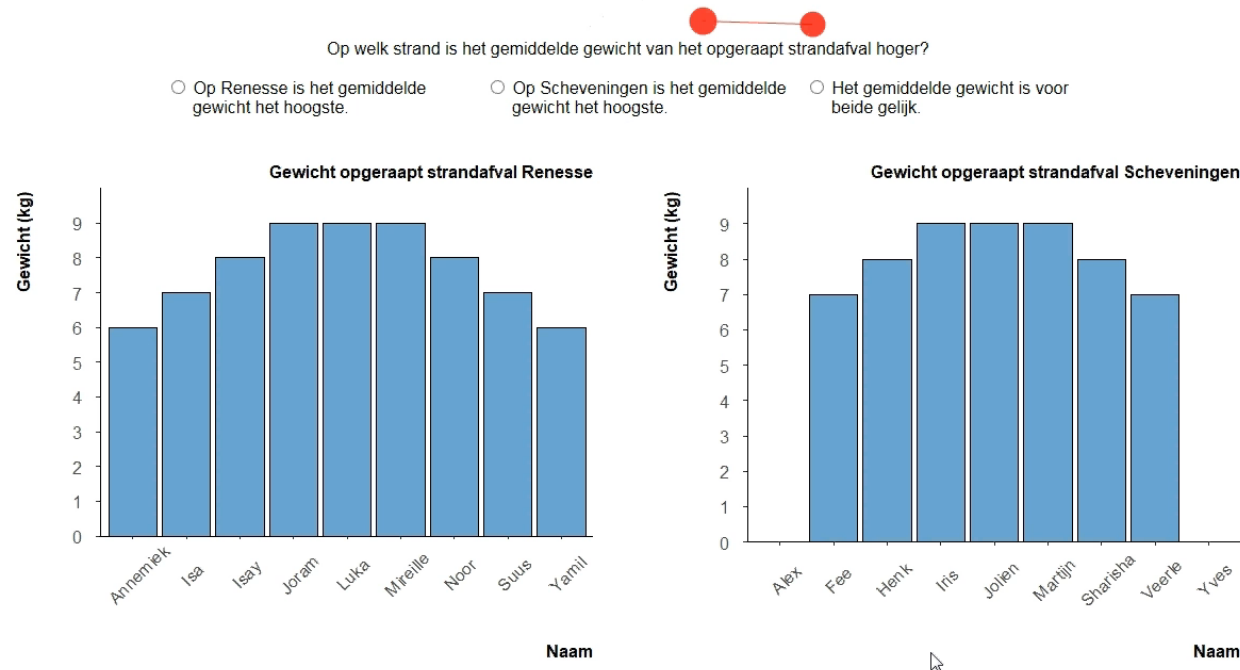
Take perspective



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

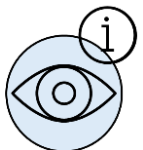
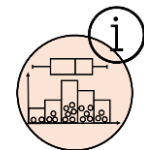
Alines antwoord: "Het gemiddelde gewicht is voor beide ongeveer hetzelfde."



Volgende

Na de taak werd aan Aline haar eigen oogbewegingsvideo getoond. Bij het terugkijken legt zij uit wat zij aan het denken was terwijl zij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Aline te nemen, en formuleer wat zij gezegd kan hebben.



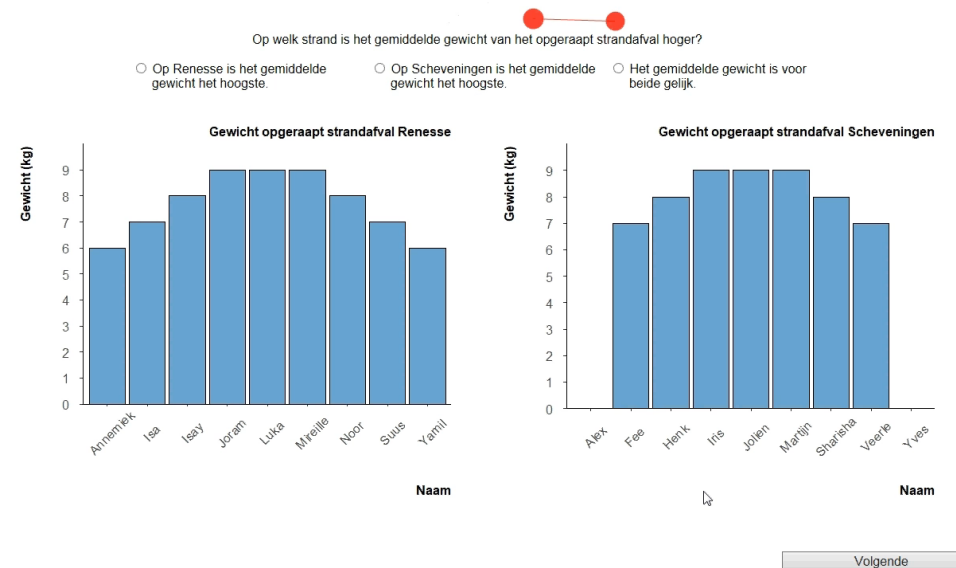
Indicate assumption



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Aline's comment: "Wanneer ik de grafieken van de gewichten die verzameld werden op de twee stranden vergeleek, dacht ik dat de gemiddelde gewichten ongeveer hetzelfde waren. Ik keek naar de grafieken en probeerde te zien of de gewichten aan beide kanten uitbalanceerden. Ik bedacht me dat als de erg zware en erg lichte gewichten gelijk leken aan elk uiteinde, ze elkaar zouden cancelen zodat de gewichten ongeveer hetzelfde zouden zijn. Ik zag dat de balken aan beide einden van de grafiek op dezelfde afstand van het midden lagen, dus ik dacht dat ze elkaar zouden uitbalanceren."

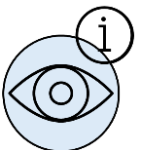
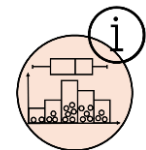


Je kan nu het echte commentaar van Aline lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.

- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



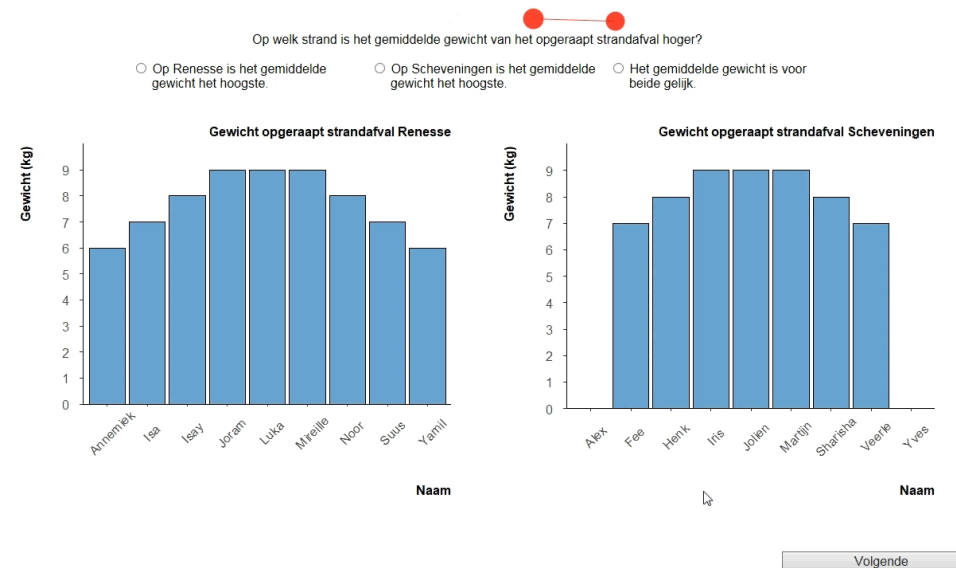
Evaluate solution



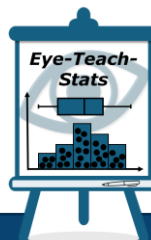
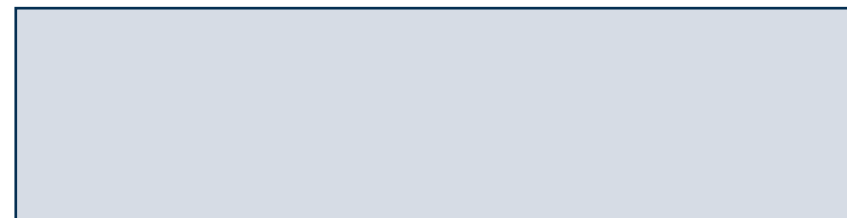
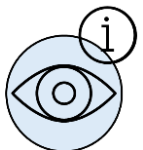
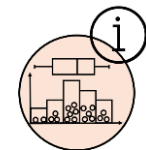
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Alines commentaar: "Wanneer ik de grafieken van de gewichten die verzameld werden op de twee stranden vergeleek, dacht ik dat de gemiddelde gewichten ongeveer hetzelfde waren. Ik keek naar de grafieken en probeerde te zien of de gewichten aan beide kanten uitbalanceerden. Ik bedacht me dat als de erg zware en erg lichte gewichten gelijk leken aan elk uiteinde, ze elkaar zouden cancelen zodat de gewichten ongeveer hetzelfde zouden zijn. Ik zag dat de balken aan beide einden van de grafiek op dezelfde afstand van het midden lagen, dus ik dacht dat ze elkaar zouden uitbalanceren."



Evalueer Alines oplossing. Wat kan je zeggen van haar begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Begrijpen van fouten van leerlingen

Aline heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid bij het interpreteren van casus-staafdiagrammen. Dit leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd het “**overgeneraliseren van een histogrambenadering**”.

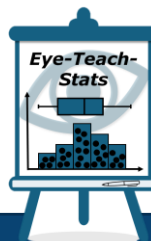
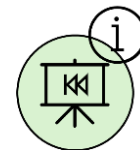
Observeerbaar gedrag: Aline zei dat de gewichten (staven) in balans waren en elkaar uitcancelen in elke grafiek. Haar oogbewegingsdata tonen dat ze vergelijkbare staven vergeleek en dat ze ook aandacht had voor de nulstaven. Samengenomen toont haar gedrag een systematische fout, die we de overgeneralisatie van een histogrambenadering bij het interpreteren van case-value plots noemen.

Interpretatie door de leerkracht/onderzoeker: Het lijkt er op dat Aline een redenering toepast die typisch gebruikt wordt voor histogrammen— het zoeken naar een balanspunt en het visueel evalueren van de vorm en symmetrie van de verdeling—en ze interpreteerde die als vergelijkbaar en dus ook het gemiddelde als ongeveer hetzelfde, ondanks de twee nulstaven in één van de grafieken. Zo’n benadering is gepast voor histogrammen, die geaggregeerde data voorstellen in intervallen. Maar dit werd hier onterecht getransfereerd naar casus-staafdiagrammen waar elke staaf maar één individueel datapunt voorstelt.

Onderliggende conceptuele moeilijkheid: De systematische fout lijkt voort te komen uit een conceptuele moeilijkheid met de relatie tussen de concepten verdeling en centrum; zodoende in het begrijpen hoe het gemiddelde wordt bepaald en vergeleken in casus-staafdiagrammen. Aline paste op deze casus-staafdiagrammen strategieën toe die passend zijn voor histogrammen. In histogrammen staan de meetwaarden langs de horizontale as en zijn deze meetwaarden gegroepeerd in klassen (intervallen). Een voor histogrammen passende strategie voor het gemiddelde is dan het zoeken naar het evenwichtspunt op de horizontale as terwijl de symmetrie van de verdeling wordt gebruikt. Deze strategie is ongeschikt voor het vinden van het gemiddelde in een casus-staafdiagram omdat de meetwaarden langs de verticale as staan en elke staaf een aparte meting weergeeft.

Aline negeerde bovendien de invloed van twee staven met hoogte nul, twee studenten verzamelden geen afval, die in een casus-staafdiagram sterk doorwerken in het gemiddelde. In tegenstelling tot histogrammen, waar waarden worden gegroepeerd, vertegenwoordigt elke staaf in een casus-staafdiagram een individuele meting.

Alternatieve strategieën en correcte benaderingen voor case-value plots: Er zijn verschillende manieren waarop leerlingen case-value plots kunnen benaderen. Sommige leerlingen gebruiken bijvoorbeeld “oppervlakte” als een benadering om het gemiddelde te schatten (meer oppervlakte betekent een hoger gemiddelde). Hoewel dit correct kan zijn in veel case-value plots, is het een onvolledige strategie (bijvoorbeeld wanneer er meer datapunten in één grafiek zijn dan in een andere). Een correcte methode om het gemiddelde te schatten in case-value plots bestaat erin om in te zien dat de hoogte van elke staaf de gemeten waarde is. Het Schatten van het gemiddelde kan dan bijvoorbeeld gebeuren door visueel een horizontale lijn te tekenen die alle staven ongeveer even hoog maakt. In histogrammen stellen de staafhoogten frequenties voor, en het balanspunt van de grafiek op de horizontale as is ongeveer het gemiddelde.

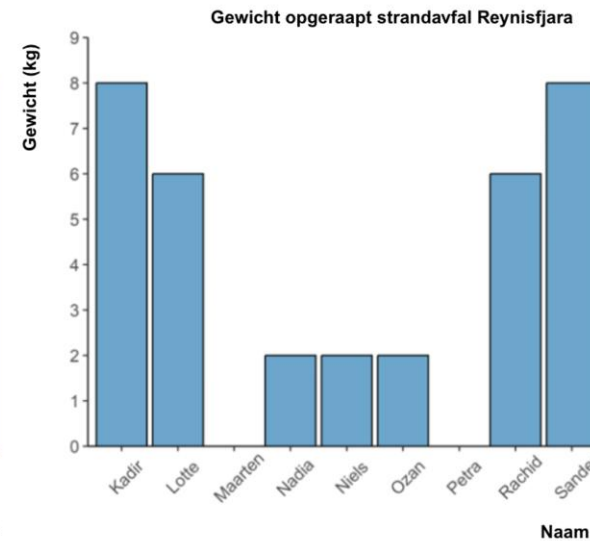
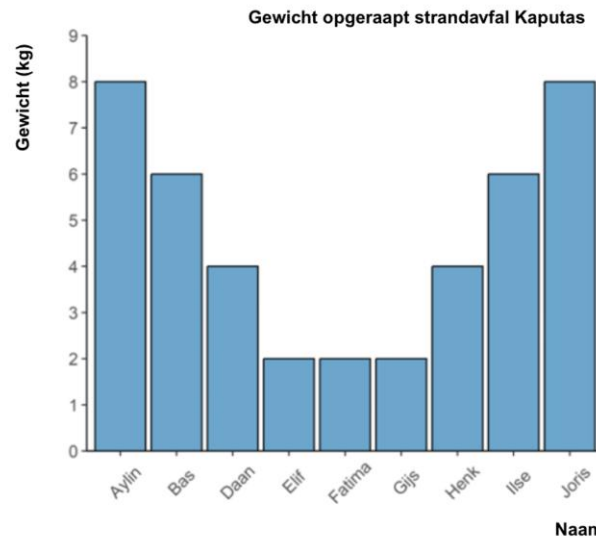


Practice



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

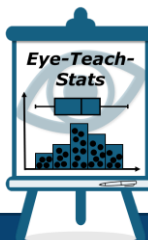
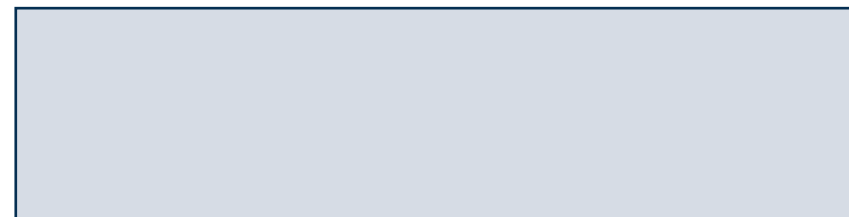


Op welk strand is het gemiddelde gewicht van het verzamelde afval groter?

- a) Het gemiddelde gewicht is het hoogst op Kaputas.
- b) Het gemiddelde gewicht is het hoogst op Reynisfjara.
- c) Het gemiddelde gewicht is voor beide ongeveer hetzelfde.

Stel je voor dat een leerling dezelfde systematische fout maakt en een histogrambenadering toepast op casus-staafdiagrammen.

Beschrijf het mogelijke oogbewegingspatroon dat de leerling zou kunnen vertonen. Verwacht je dat deze fout hier optreedt? Waarom (niet)?



Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the National Agency. Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

06 Dotplot

Vignette over een fout op basis van een paarsgewijze
vergelijking van stapels

Introducing situation



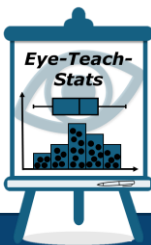
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 6de leerjaar / groep 8 over data-interpretatie. Je leidt leerlingen in in het vergelijken van de verdelingen van data via dotplots/stippendiagrammen.

Je ziet dat een van je leerlingen, Zeyd, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Hij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Zeyd aan werkt.



Students task



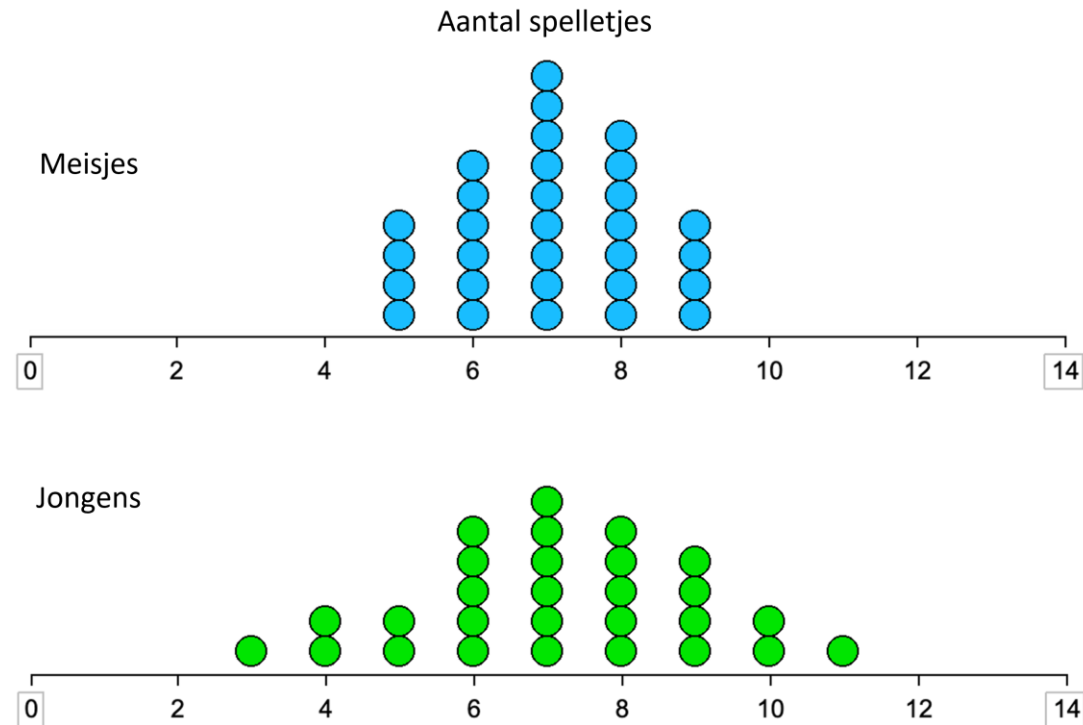
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

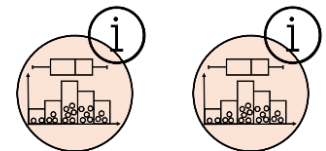
Verschillen jongens en meisjes in het aantal spelletjes dat ze op hun smartphone hebben? Een enquête over deze vraag werd uitgevoerd in de Parkschool, met 30 meisjes en 28 jongens. Vergelijk de twee steekproeven en evalueer vervolgens:

De data van de steekproeven komen overeen met de aanname dat

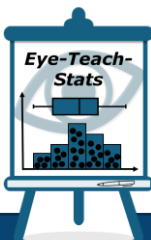
- a) Meisjes veel meer spelletjes op hun telefoon hebben.
- a) Jongens veel meer spelletjes op hun telefoon hebben.
- a) Jongens en meisjes ongeveer evenveel spelletjes op hun telefoon hebben.



Dit is de taak waar Zeyd aan werkt. Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.



- a) Meisjes veel meer spelletjes op hun telefoon hebben.
- b) Jongens veel meer spelletjes op hun telefoon hebben.
- c) Jongens en meisjes ongeveer evenveel spelletjes op hun telefoon hebben.



Introducing eye-tracking

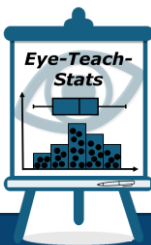


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een oogbewegingsvideo krijgen van je leerling Zeyd, die gemaakt werd terwijl hij aan de taak werkte. De oogbewegingsvideo geeft aan waar zijn visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



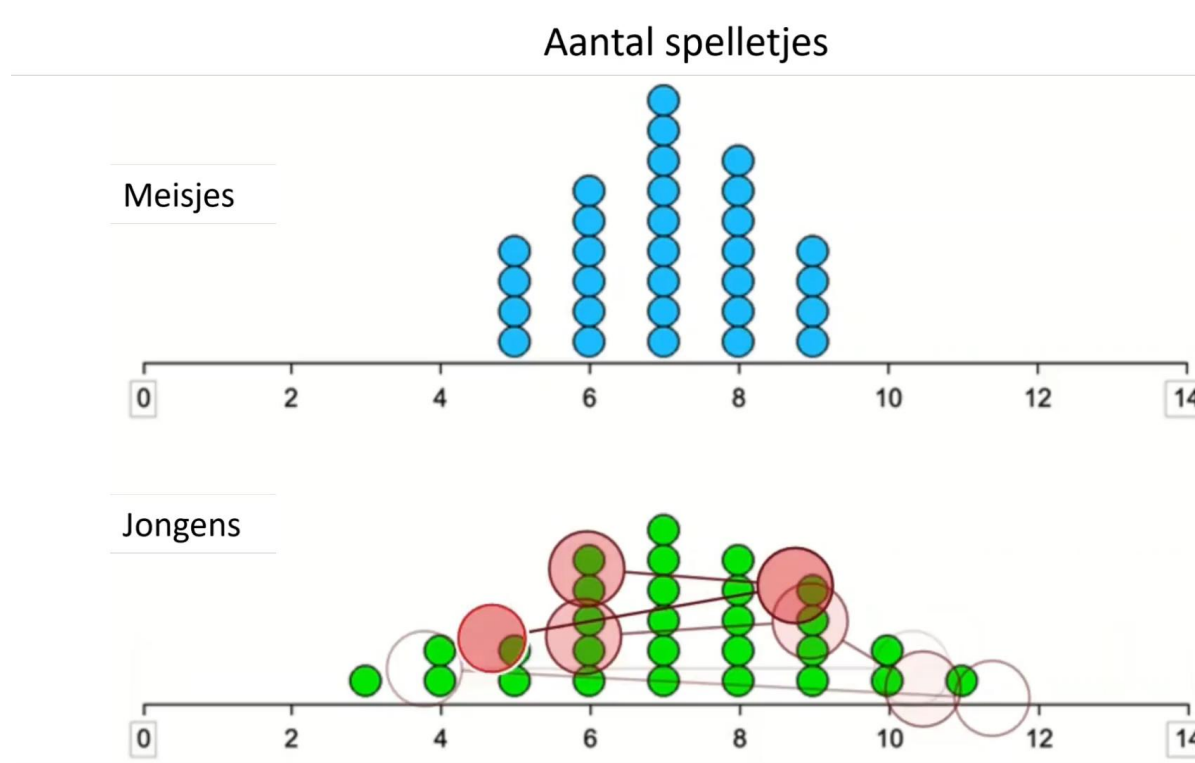
First look



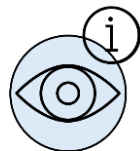
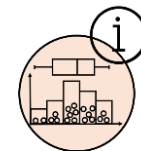
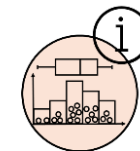
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Zeyds antwoord: "Ik zou a) zeggen. De meisjes hebben veel meer spelletjes op hun telefoon."



Kijk naar de oogbewegingsvideo die de oogbewegingen van je leerling Zeyd toont en naar zijn antwoord.



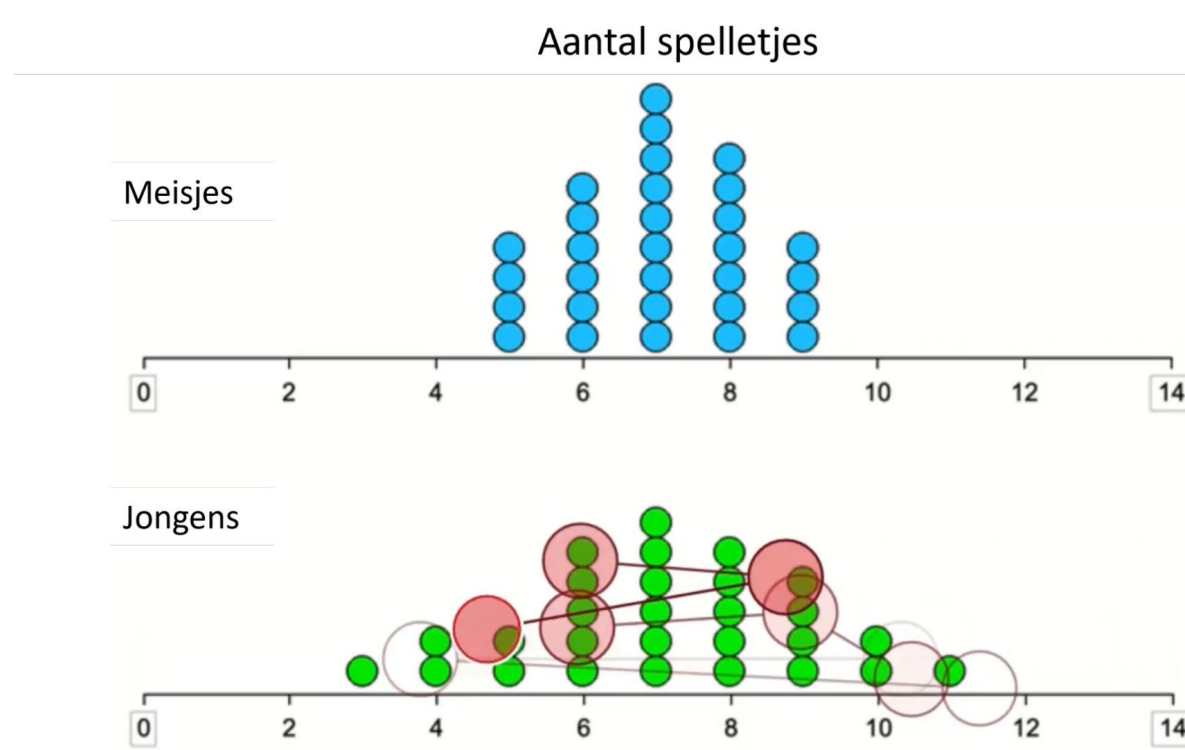
Take perspective



Co-funded by
the European Union

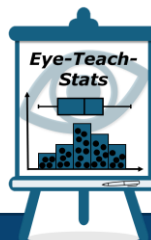
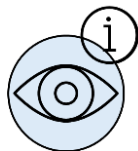
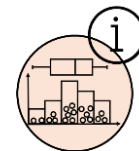
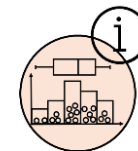
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Zeyds antwoord: "Ik zou a) zeggen. De meisjes hebben veel meer spelletjes op hun telefoon."



Na de taak werd aan Zeyd zijn eigen oogbewegingsvideo getoond. Bij het terugkijken legt hij uit wat hij aan het denken was terwijl hij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Zeyd te nemen, en formuleer wat hij gezegd kan hebben.



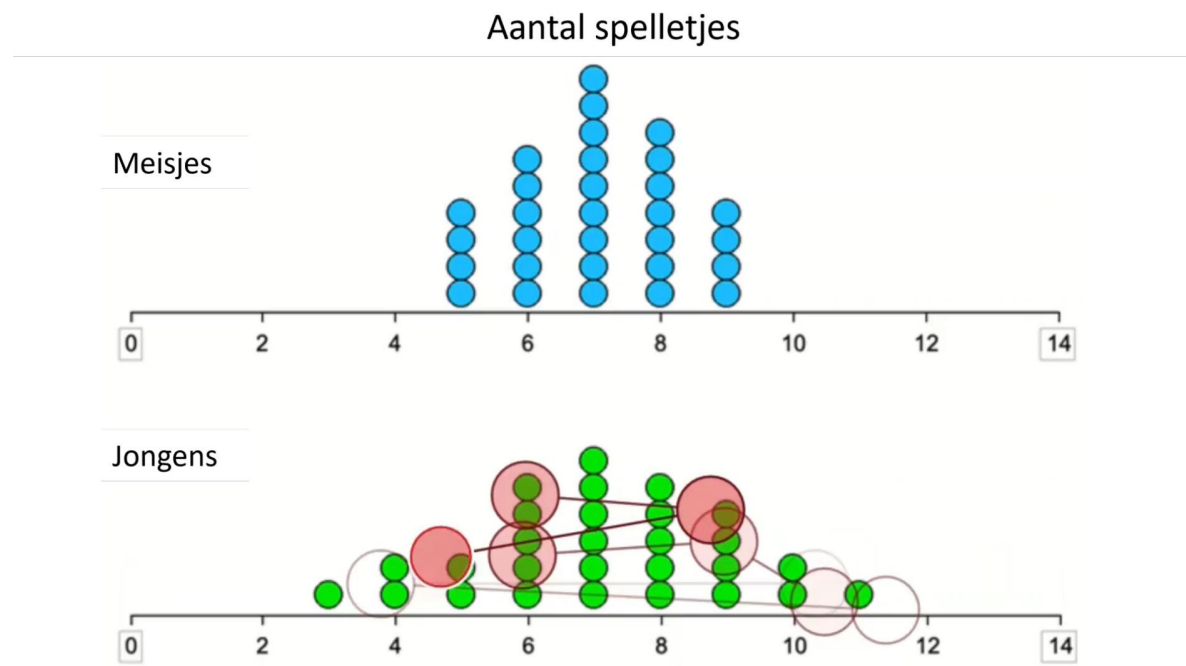
Indicate assumption



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Zeyds commentaar: “Ik keek dus hoeveel bolletjes er waren en ik vergeleek ze. Bijvoorbeeld, jongens en meisjes hebben hetzelfde aantal bolletjes bij negen, maar de meisjes hebben meer bolletjes bij zeven en acht, enzovoort. De kleine stapels aan de buitenkant bij de jongens zijn niet zo belangrijk. Daarom denk ik dat de meisjes veel meer spelletjes hebben.”

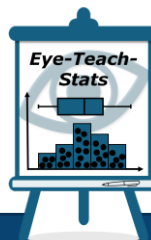
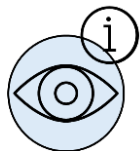
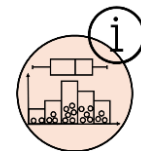
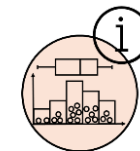


Je kan nu het echte commentaar van Zeyd lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.

- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



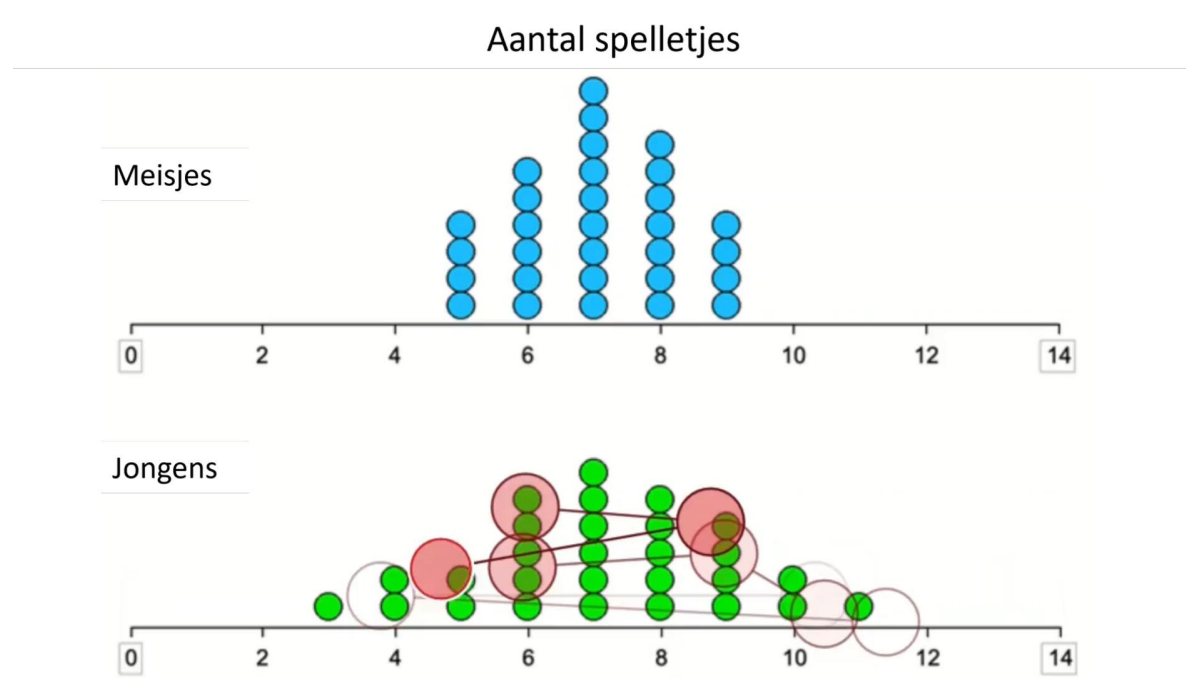
Evaluate solution



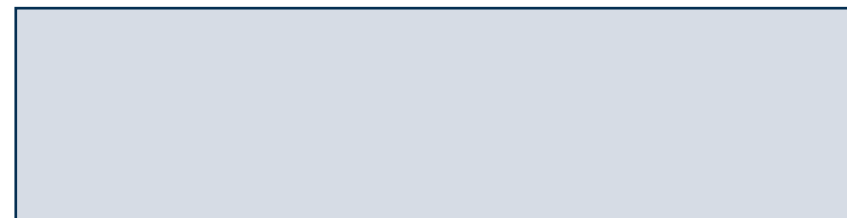
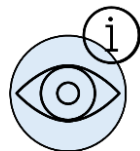
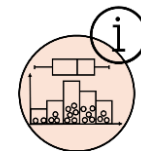
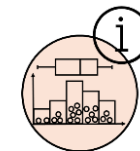
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Zeyds commentaar: “Ik keek dus hoeveel bolletjes er waren en ik vergeleek ze. Bijvoorbeeld, jongens en meisjes hebben hetzelfde aantal bolletjes bij negen, maar de meisjes hebben meer bolletjes bij zeven en acht, enzovoort. De kleine stapels aan de buitenkant bij de jongens zijn niet zo belangrijk. Daarom denk ik dat de meisjes veel meer spelletjes hebben.”



Evalueer Zeyds oplossing. Wat kan je zeggen van zijn begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

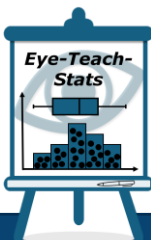
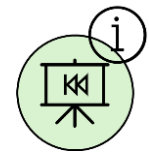
Begrijpen van fouten van leerlingen

Zeyd heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid met betrekking tot het interpreteren van dot plots. Die leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd het “Paarsgewijs vergelijken van stapels”.

Interpretatie van het gedrag: Uit de oogbewegingsvideo en de commentaren kunnen we zien dat de oogbewegingen van Zeyd bewegen van de ene naar de andere verdeling, en dat ze daarbij vooral focussen op vergelijkbare stapels bolletjes. Hij telt het aantal bolletjes als individuele datapunten en vergelijkt de stapels met elkaar. Hij focust daarbij op de verdeling als een verzameling van individuele datapunten.

Het begrijpen van de fout en de onderliggende conceptuele moeilijkheid: Echter, wanneer je steekproeven van een verschillende grootte vergelijkt, dan moeten de frequenties in relatie tot elkaar worden bekeken. De verdeling moet niet gewoon gezien worden als een verzameling van individuele datapunten; globale kenmerken moeten ook worden meegenomen. De systematische fout gebeurt door het onterecht gebruiken van een lokaal beeld. Een centraal doel in het statistiekonderwijs is om leerlingen te helpen een globaal beeld te ontwikkelen van verdelingen. In zo’n perspectief zien leerlingen verdelingen als conceptuele entiteiten met algemene kenmerken zoals centrum, spreiding en vorm.

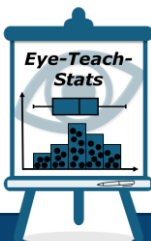
Op de volgende slide kan je een overzicht zien van lokale en globale kenmerken die meegenomen kunnen worden bij het vergelijken van verdelingen.



Perspectieven op de verdelingen van data: lokaal vs. globaal beeld

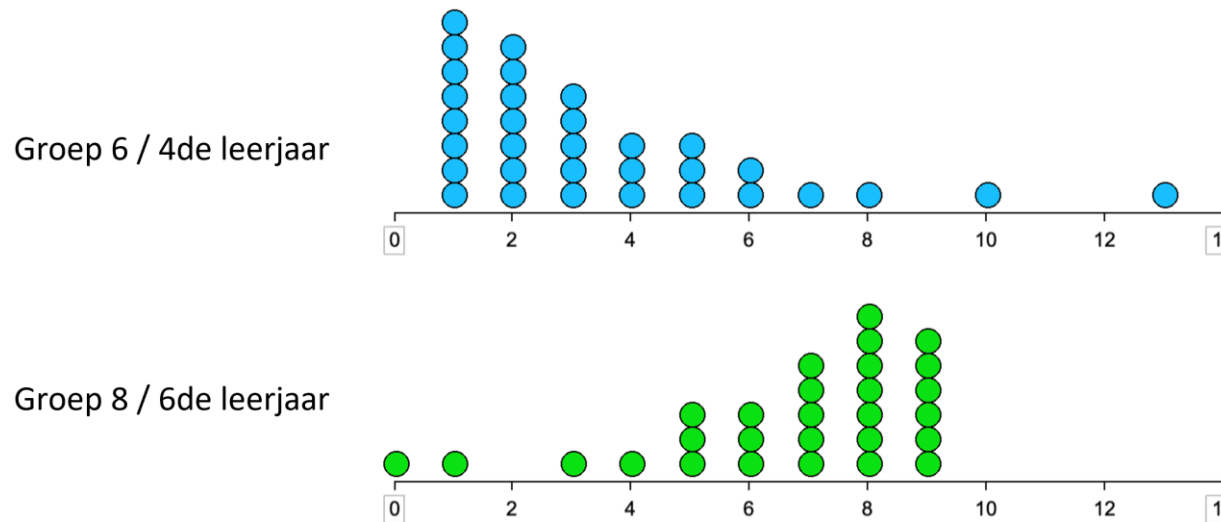
Globaal beeld ↓	Verdeling (conceptuele entiteit)			↑ Lokaal beeld
	Globale kenmerken			
	centrum <i>Visueel geschat gemiddelde...</i>	Spreiding/dichtheid <i>Geobserveerde uitgespreidheid, meerderheid, bereik, ...</i>	Vorm <i>Geobserveerde scheefheid, pieken, staarten...</i>	
	Lokale kenmerken Individuele datapunten <i>Extreme waarden, uitbijters, absolute frequentie van bolletjes in bepaalde intervallen, waarde van bepaalde intervallen, waarden los van de verdeling aan de uiteinden ...</i>			

Aangepast naar Schreiter & Vogel, 2023



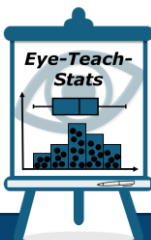
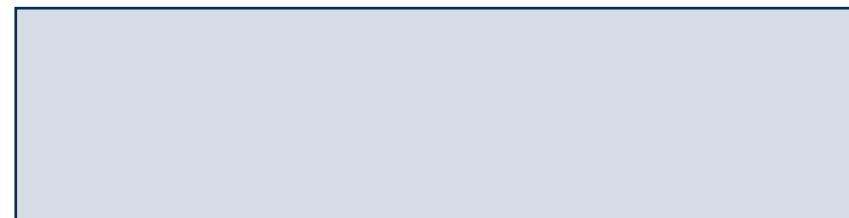
Verschillen leerlingen in groep 6 / 4de leerjaar en groep 8 / 6de leerjaar in het aantal spelletjes die ze op hun smartphone hebben? Een enquête over deze vraag werd uitgevoerd in de Parkschool, met 32 leerlingen uit groep 6 en 28 leerlingen uit groep 8. Vergelijk de twee steekproeven en evalueer vervolgens:

Aantal spelletjes



Stel je voor dat een leerling dezelfde systematische fout maakt en de stapels paarsgewijs vergelijkt.

Beschrijf het mogelijke oogbewegingspatroon dat de leerling zou kunnen vertonen. Zou deze strategie tot een juist antwoord leiden? Waarom (niet)?





Eye-Teach-Stats Eye-Tracking Vignettes © 2026



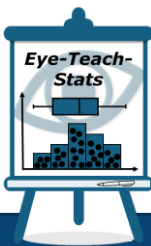
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the National Agency. Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

07 Histogram

Vignette over een fout op basis van een paarsgewijze
vergelijking van staven



Introducing situation



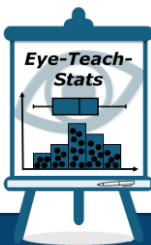
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 4de jaar secundair onderwijs / vierde klas over data-interpretatie. Je leidt leerlingen in in het vergelijken van de verdelingen van data via histogrammen.

Je ziet dat een van je leerlingen, Sem, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Hij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Sem aan werkt.

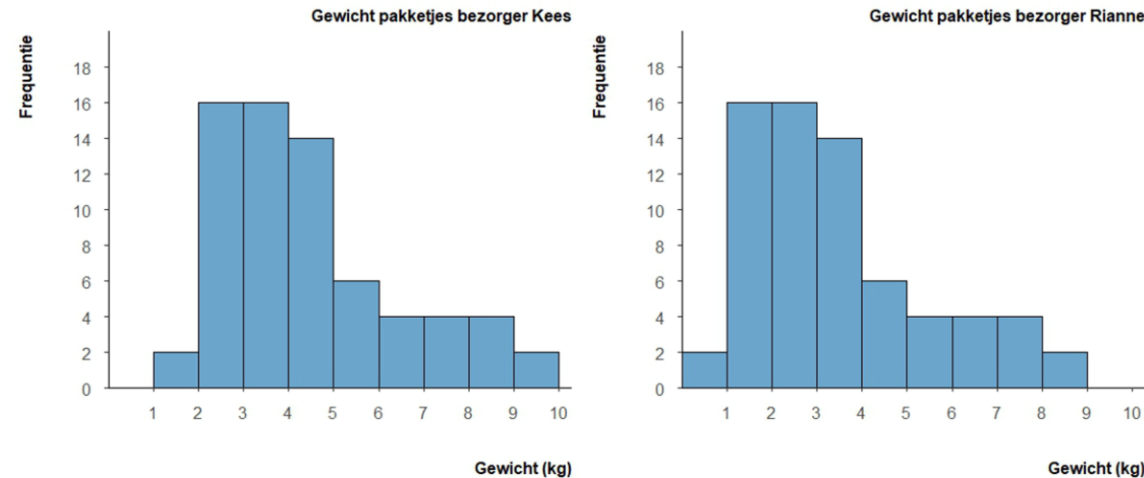


Students task



Co-funded by
the European Union

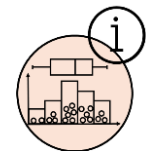
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.



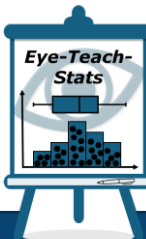
Welke postbode bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten?

- a) Kees bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten.
- b) Rianne bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten.
- c) Het gemiddelde gewicht is voor beiden ongeveer gelijk.

Dit is de taak waar Sem aan werkt. Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.



- a) Kees bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten.
- b) Rianne bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten.
- c) Het gemiddelde gewicht is voor beiden ongeveer gelijk.



Introducing eye-tracking

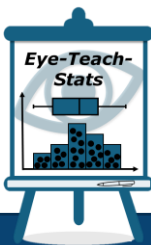


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een oogbewegingsvideo krijgen van je leerling Sem, die gemaakt werd terwijl hij aan de taak werkte. De oogbewegingsvideo geeft aan waar zijn visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



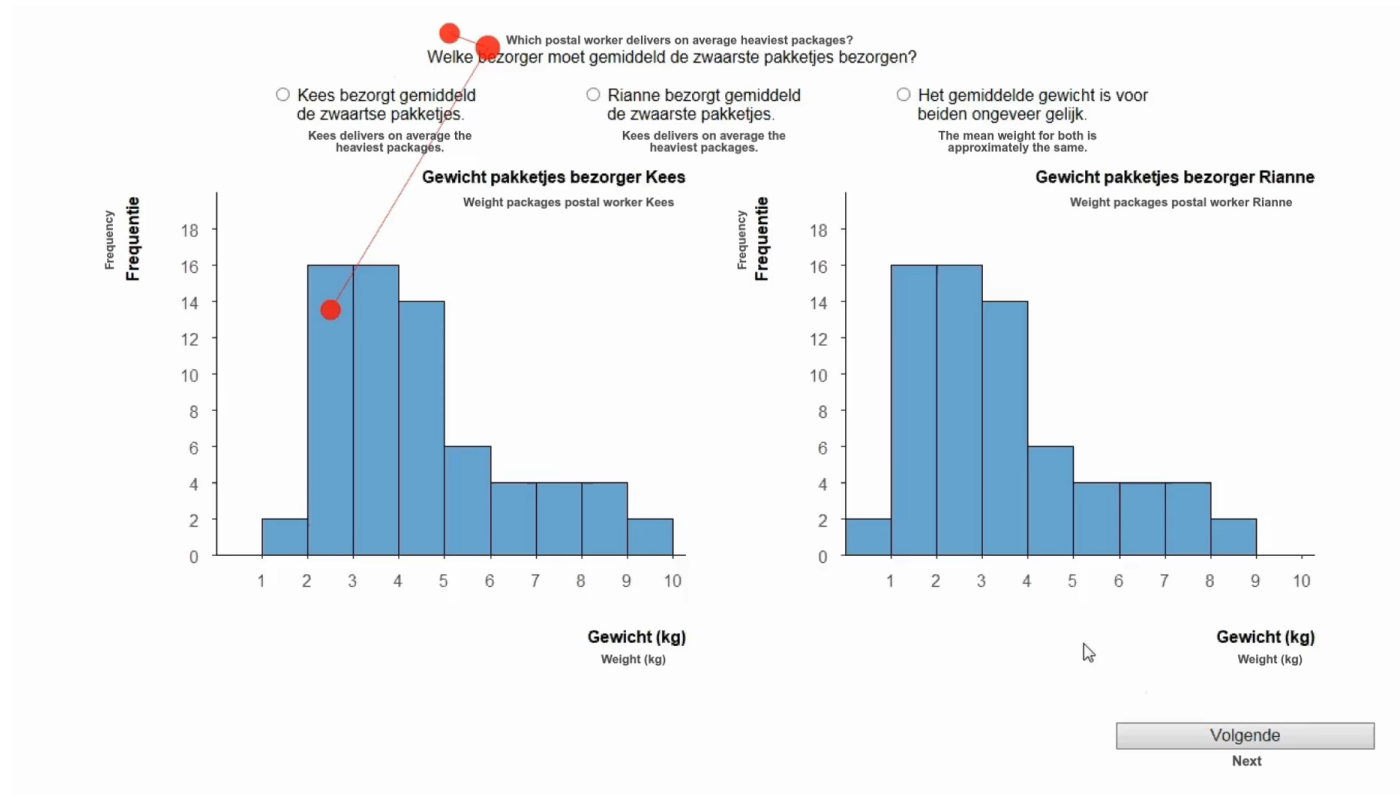
First look



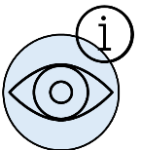
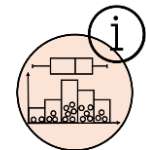
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Sems antwoord: “Het gemiddelde gewicht is voor beiden ongeveer gelijk.”



Kijk naar de oogbewegingsvideo die de oogbewegingen van je leerling Sem toont en naar zijn antwoord.



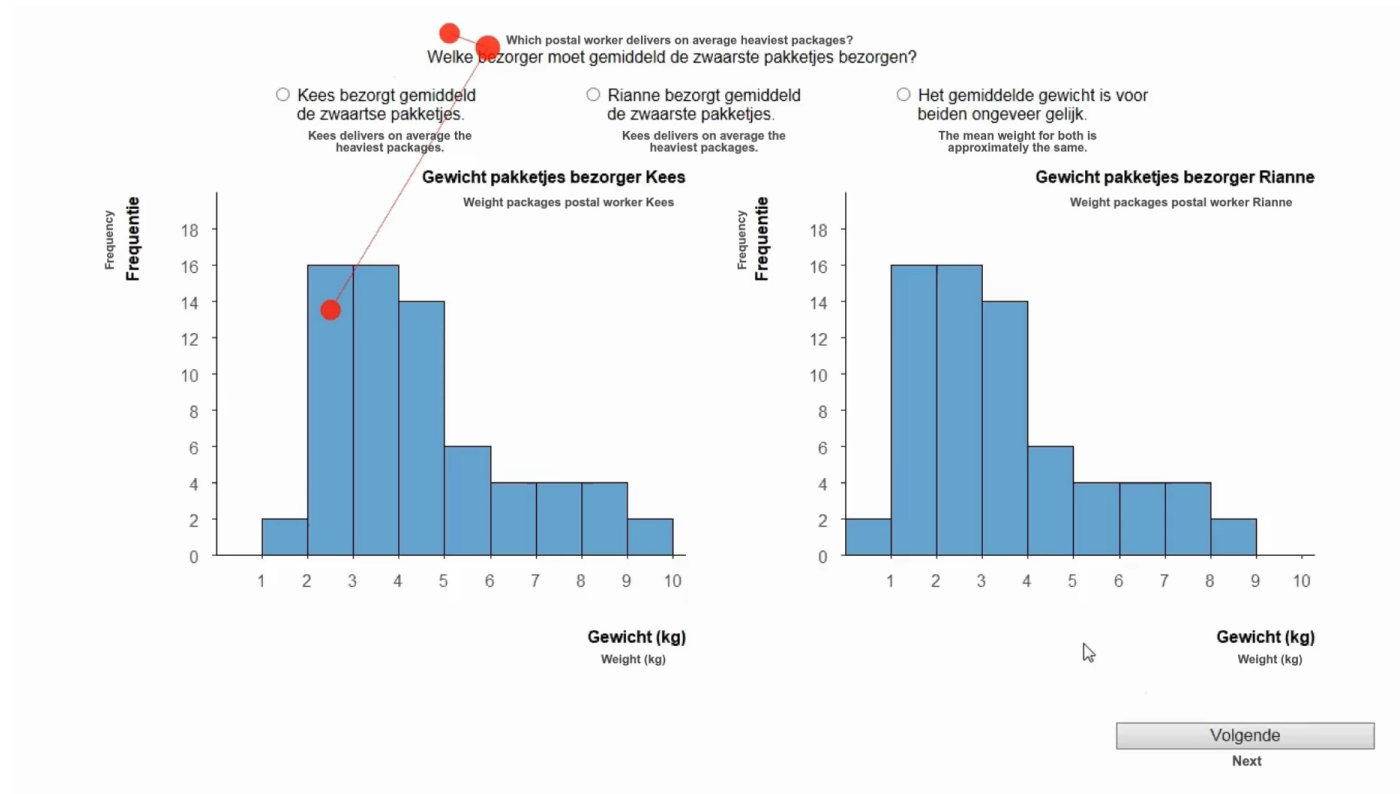
Take perspective



Co-funded by
the European Union

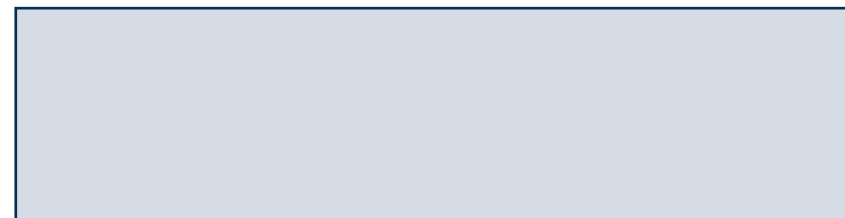
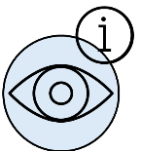
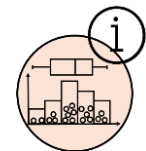
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Sems antwoord: "Het gemiddelde gewicht is voor beiden ongeveer gelijk."



Na de taak werd aan Sem zijn eigen oogbewegingsvideo getoond. Bij het terugkijken legt hij uit wat hij aan het denken was terwijl hij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Sem te nemen, en formuleer wat hij gezegd kan hebben.



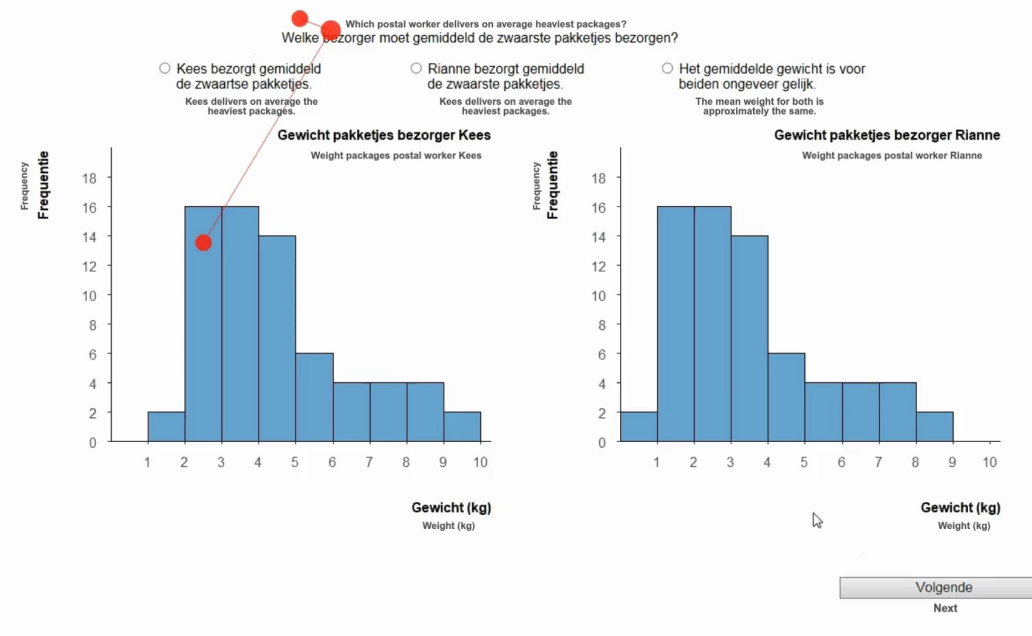
Indicate assumption



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Sems commentaar: “Ik zag dat Kees zwaardere pakketten had met minder lichte, en dat Rianne vooral lichtere pakketten had met een paar zware. Maar de verdelingen leken op elkaar. Ik vergeleek elk paar stapels in de histogrammen, en het leek erop dat de verschillen in stapels elkaar konden compenseren, dus ik denk dat de gemiddelde gewichten ongeveer gelijk waren.”

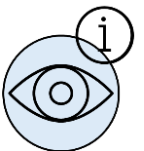
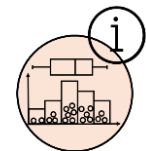


Je kan nu het echte commentaar van Sem lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.

- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



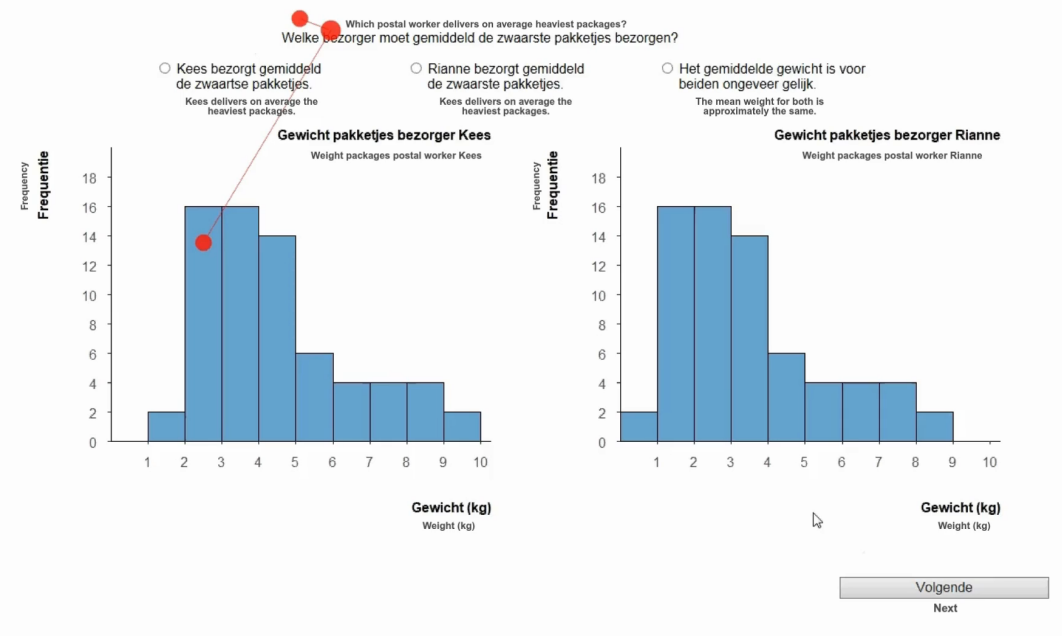
Evaluate solution



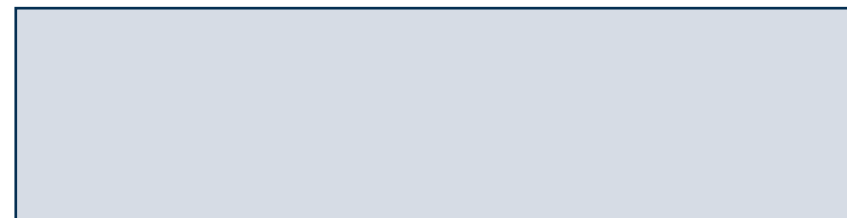
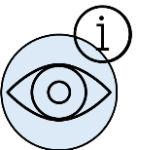
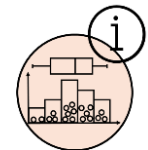
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Sems commentaar: “Ik zag dat Kees zwaardere pakketten had met minder lichte, en dat Rianne vooral lichtere pakketten had met een paar zware. Maar de verdelingen leken op elkaar. Ik vergeleek elk paar stapels in de histogrammen, en het leek erop dat de verschillen in stapels elkaar konden compenseren, dus ik denk dat de gemiddelde gewichten ongeveer gelijk waren.”



Evalueer Sems oplossing. Wat kan je zeggen van zijn begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

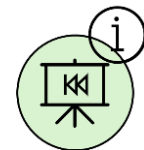
Begrijpen van fouten van leerlingen

Sem heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid bij het interpreteren van histogrammen. Die leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd het “te veel nadruk leggen op lokale kenmerken: een **paarsgewijze vergelijking van staven**”

Observeerbaar gedrag: Sem legde uit dat hij de stapels tussen beide histogrammen vergeleek en aannam dat de verschillen elkaar zouden opheffen, wat hem deed concluderen dat de gemiddelden vergelijkbaar waren. We kunnen observeren dat Sems blik verschoof van een stapel in het ene histogram naar een vergelijkbare stapel in het andere histogram. Dit samen wijst op een observeerbare systematische fout, die we aanduiden als “te veel nadruk op lokale kenmerken: een paarsgewijze vergelijking van staven” bij het interpreteren van histogrammen.

Interpretatie door de docent/onderzoeker: Het lijkt erop dat Sem zich bezighield met een paarsgewijze vergelijking van individuele stapels in de twee histogrammen. Zijn kijkpatroon weerspiegelt een gerichte vergelijking van afzonderlijke staven in plaats van een beschouwing van de histogrammen als geheel. In een histogram worden gegevens samengevoegd in klassen, en het vergelijken van individuele staven zonder de gehele verdeling in overweging te nemen leidt tot foutieve conclusies over de geschatte gemiddelden. Sem negeerde dat de verschuiving naar rechts (van het linker histogram) leidt tot een hoger gemiddelde; hij hield dus geen rekening met de globale verschuiving in de verdeling. Een correcte interpretatie van het gemiddelde vereist echter een evaluatie van de gehele verdeling en de verschuivingen daarin, in plaats van geïsoleerde staafvergelijkingen.

Onderliggende conceptuele moeilijkheid: De systematische fout van Sem is waarschijnlijk het gevolg van een onderliggende conceptuele moeilijkheid met de begrippen data en verdeling. Hij gebruikte lokale kenmerken (paarsgewijze vergelijking van stapels) en negeerde globale kenmerken (de verschuiving van de verdeling) bij het interpreteren van histogrammen. Een correcte interpretatie vereist aandacht voor de gehele verdeling en de verschuivingen daarin, in plaats van geïsoleerde vergelijkingen van staven.

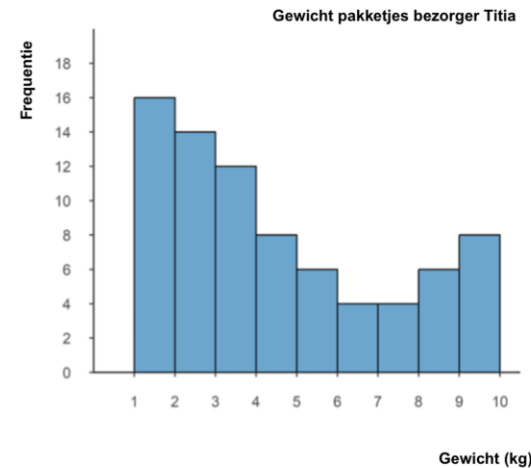
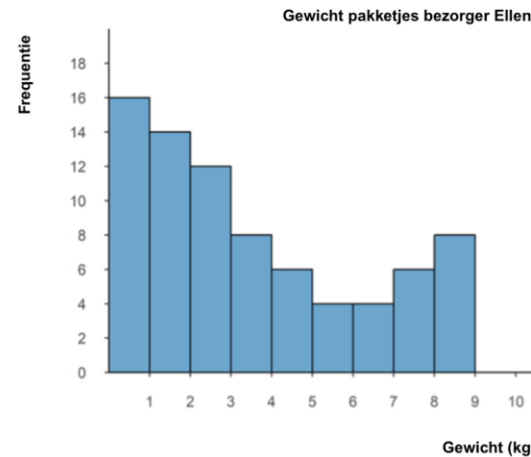


Perspectieven op de verdelingen van data: lokaal vs. globaal beeld

Globaal beeld ↓	Verdeling (conceptuele entiteit)			↑ Lokaal beeld
	Globale kenmerken			
	centrum <i>Visueel geschat gemiddelde...</i>	Spreiding/dichtheid <i>Geobserveerde uitgespreidheid, meerderheid, bereik, ...</i>	Vorm <i>Geobserveerde scheefheid, pieken, staarten...</i>	
	Lokale kenmerken Individuele datapunten <i>Extreme waarden, uitbijters, absolute frequentie van bolletjes in bepaalde intervallen, waarde van bepaalde intervallen, waarden los van de verdeling aan de uiteinden ...</i>			

Aangepast naar Schreiter & Vogel, 2023



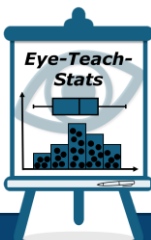
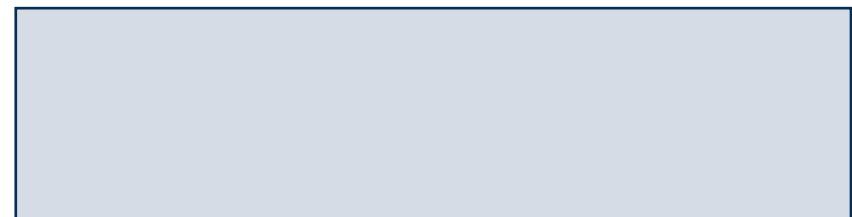


Welke postbode bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten?

- a) Ellen bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten.
- b) Titia bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten.
- c) Het gemiddelde gewicht is voor beiden ongeveer gelijk.

Stel je voor dat een leerling dezelfde systematische fout maakt: te veel nadruk leggen op lokale kenmerken (paarsgewijze vergelijking van staven).

Beschrijf het mogelijke oogbewegingspatroon dat de leerling zou kunnen vertonen. Verwacht je dat deze fout hier optreedt? Waarom (niet)?



Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the National Agency. Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

08 Case-Value Plot

Vignette over een fout op basis van een paarsgewijze
vergelijking van staven

Introducing situation



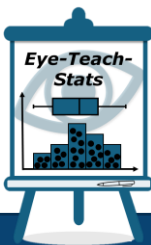
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 4de jaar secundair onderwijs / vierde klas over data-interpretatie. Je leidt leerlingen in in het vergelijken van de verdelingen van data via casus-staafdiagrammen.

Je ziet dat een van je leerlingen, Eva, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Zij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Eva aan werkt.

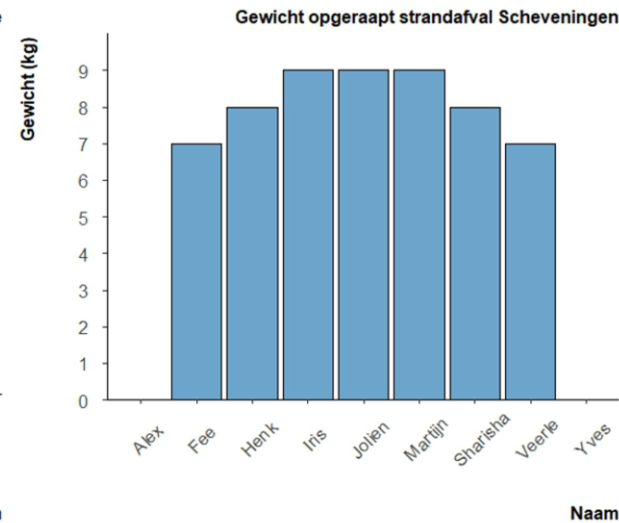
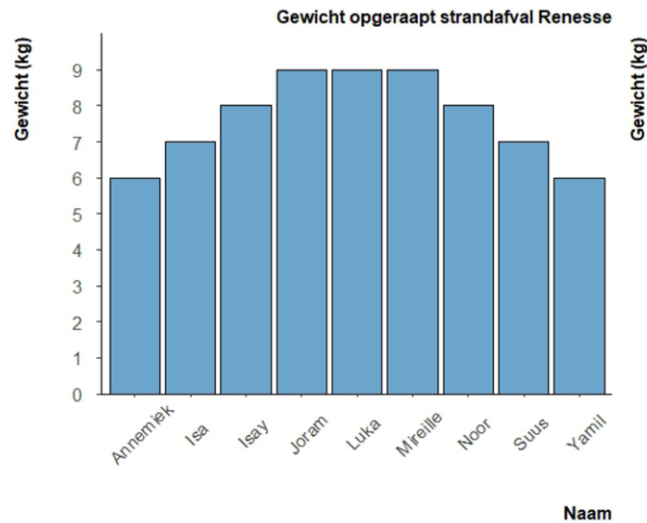


Students task



Co-funded by
the European Union

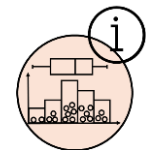
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.



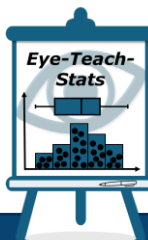
Op welk strand is het gemiddelde gewicht van het verzamelde afval groter?

- a) Het gemiddelde gewicht is het hoogst op Renesse.
- b) Het gemiddelde gewicht is het hoogst op Scheveningen.
- c) Het gemiddelde gewicht is voor beide ongeveer hetzelfde.

Dit is de taak waar Eva aan werkt. **Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.**



- a) Het gemiddelde gewicht is het hoogste op Renesse .
- b) Het gemiddelde gewicht is het hoogste op Scheveningen .
- c) Het gemiddelde gewicht is voor beide ongeveer hetzelfde.



Introducing eye-tracking

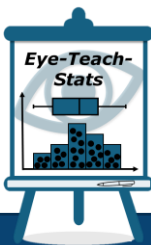


Co-funded by
the European Union

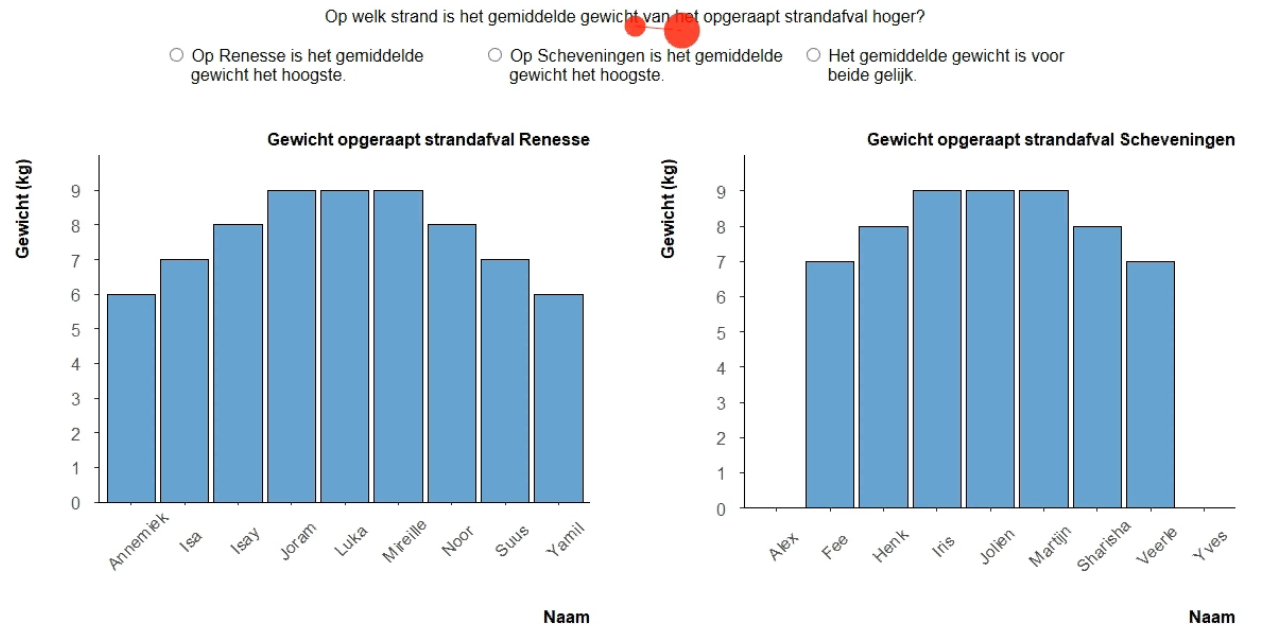
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een oogbewegingsvideo krijgen van je leerling Eva, die gemaakt werd terwijl zij aan de taak werkte. De oogbewegingsvideo geeft aan waar haar visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.

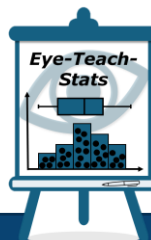
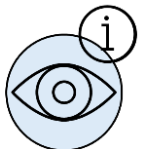
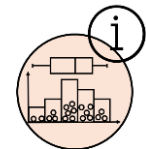


Eva's antwoord: "Op Scheveningen is het gemiddelde gewicht het hoogste."



Volgende slide

Kijk naar de oogbewegingsvideo die de oogbewegingen van je leerling Eva toont en naar haar antwoord.



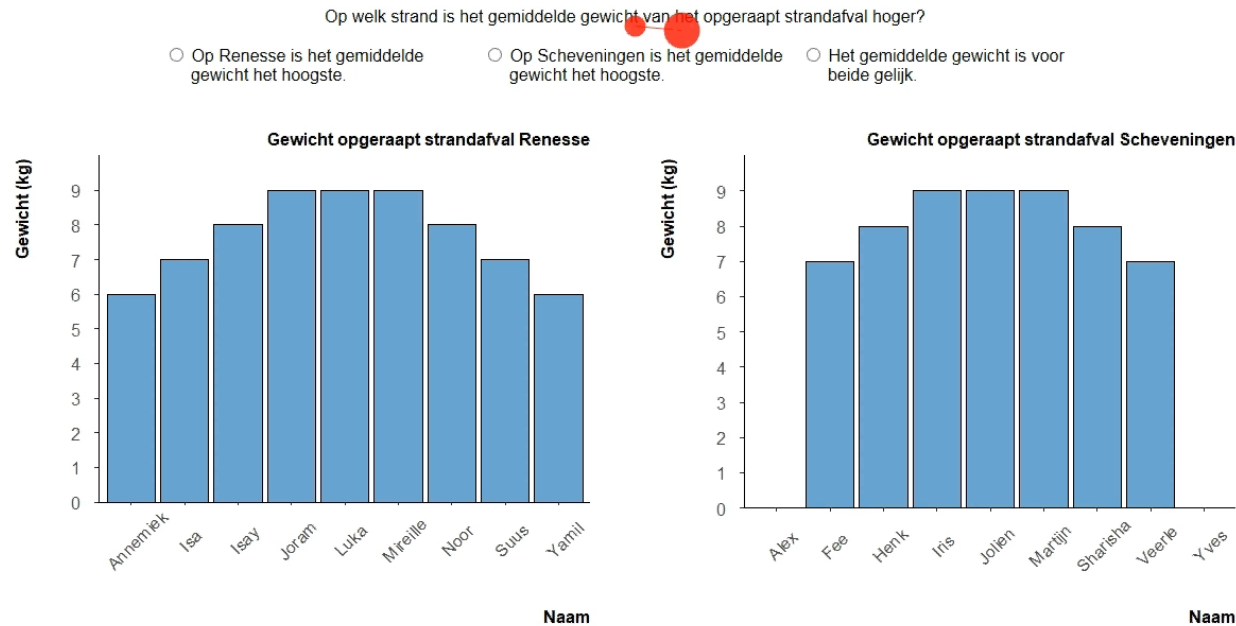
Take perspective



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

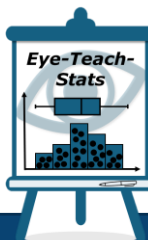
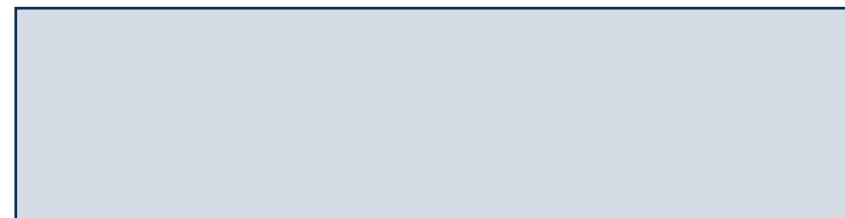
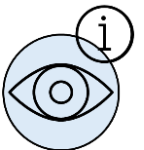
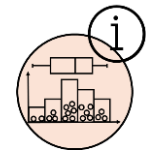
Eva's antwoord: "Op Scheveningen is het gemiddelde gewicht het hoogste."



Volgende slide

Na de taak werd aan Eva haar eigen oogbewegingsvideo getoond. Bij het terugkijken legt zij uit wat zij aan het denken was terwijl zij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Eva te nemen, en formuleer wat zij gezegd kan hebben.



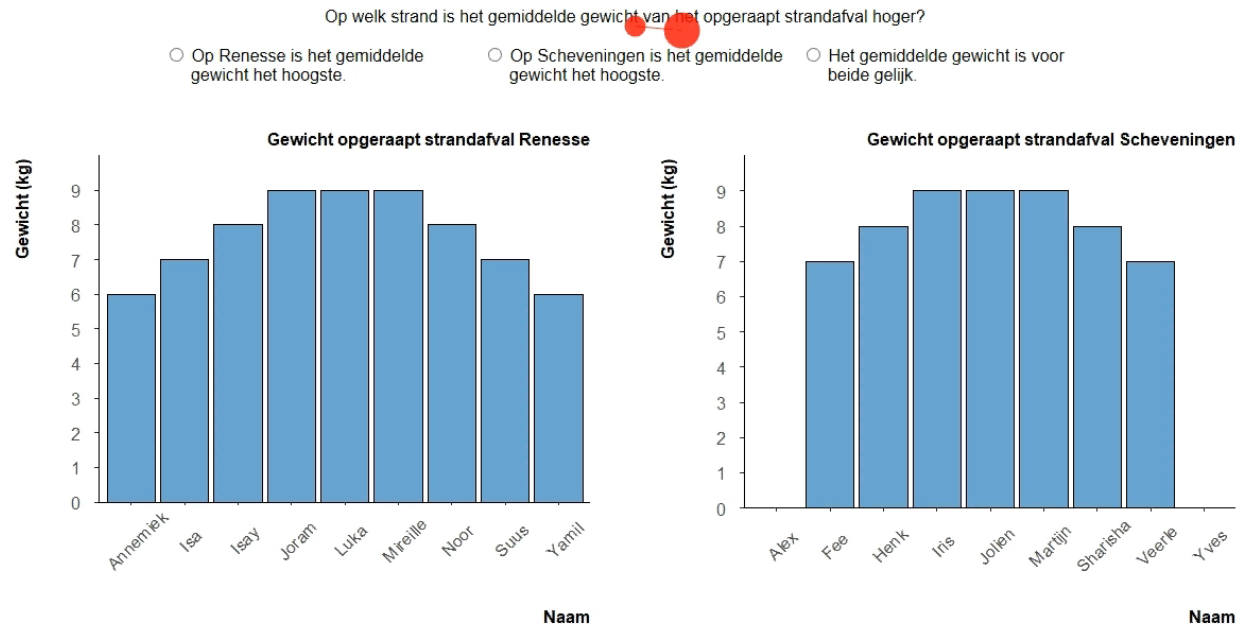
Indicate assumption



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Eva's commentaar: "Ik vergeleek enkele balken van elke grafiek een voor een en zag dat Renesse meer balken had met lagere waarden, dus ik dacht dat Scheveningen dus een hoger strandafvalgewicht moest hebben."



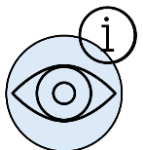
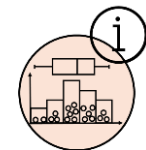
Volgende slide

Je kan nu het echte commentaar van Eva lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.

- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



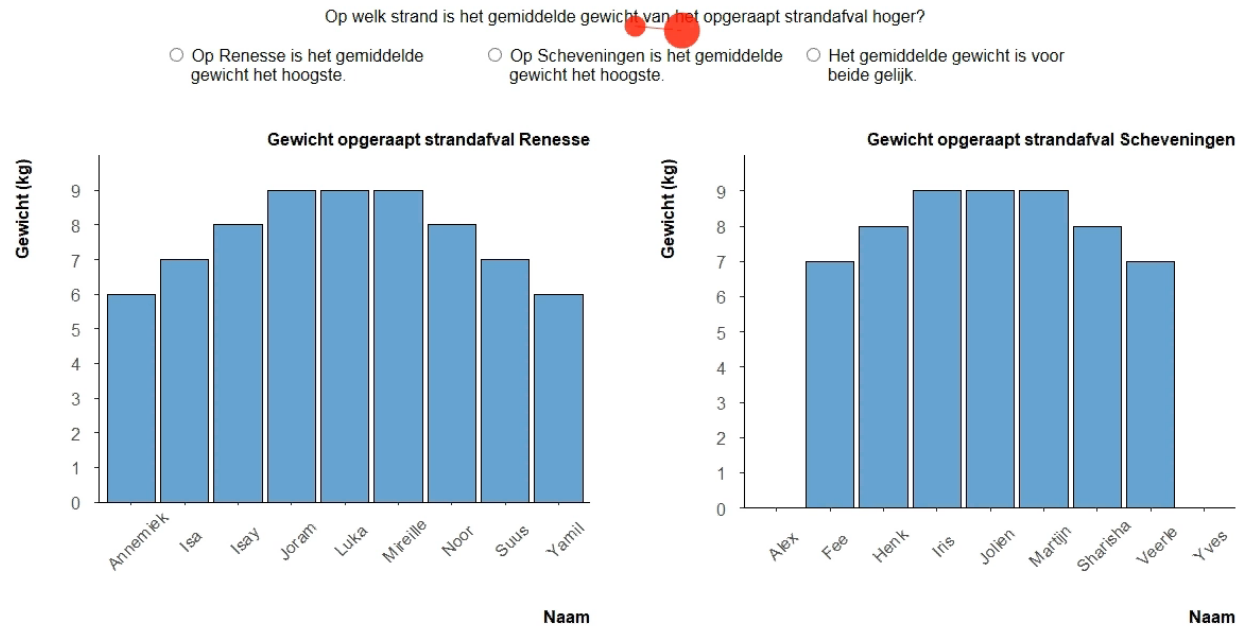
Evaluate solution



Co-funded by
the European Union

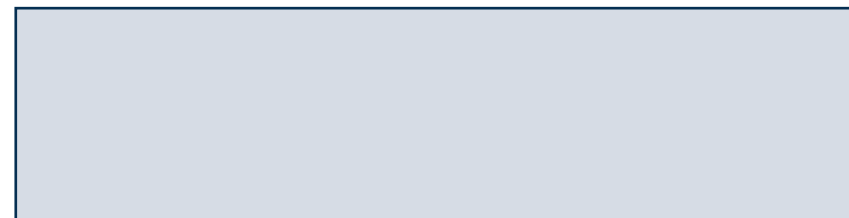
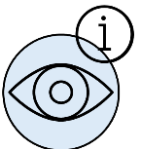
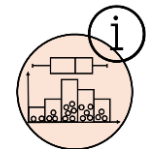
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Eva's commentaar: "Ik vergeleek enkele balken van elke grafiek een voor een en zag dat Renesse meer balken had met lagere waarden, dus ik dacht dat Scheveningen dus een hoger strandafvalgewicht moest hebben."



Volgende slide

Evalueer Eva's oplossing. Wat kan je zeggen van haar begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

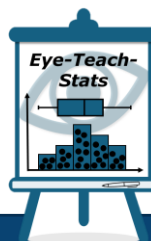
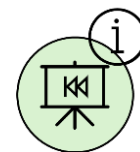
Begrijpen van fouten van leerlingen

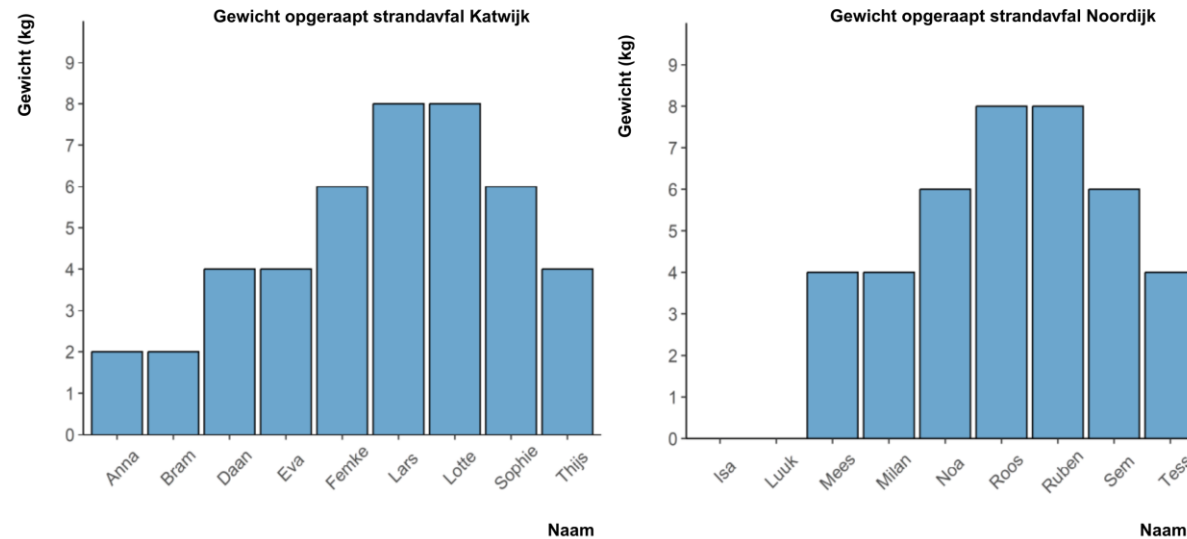
Eva heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid bij het interpreteren van casus-staafdiagrammen. Dit leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd het “te veel nadruk leggen op lokale kenmerken: een **paarsgewijze vergelijking van staven**”.

Observeerbaar gedrag: Eva zei dat ze enkele staven in en tussen grafieken een voor een vergeleek, en vermeldde dat Renesse meer staven had met lagere waarden. Haar oogbewegingen bewogen inderdaad binnen en tussen case-value plots, en focusten daarbij vooral op vergelijkbare staven. Ze focuste ook kort op de naam onder een “nul” staaf in de rechtse grafiek. Dit alles wijst op een observeerbare systematische fout, die we het overbenadrukken van lokale kenmerken noemen: een paarsgewijze vergelijking van staven om het gemiddelde te schatten. Het negeren van de “nul” staven is een veel voorkomende fout.

Interpretatie door de leerkracht/onderzoeker: Hoewel Eva de hoogte van de staven correct lijkt te interpreteren als weergaven van gemeten waarden, negeert ze de impact van de nulstaven – de gemeten waarden van “nul”. Ze ziet over het hoofd dat in beide grafieken hetzelfde aantal gemeten waarden wordt weergegeven.

Onderliggende conceptuele moeilijkheid: Eva vertoont een onderliggende conceptuele moeilijkheid met data, en bijgevolg in het begrijpen hoe gemeten waarden van nul worden weergegeven in case-value plots. Eva moet inzien dat in dit scenario twee leerlingen helemaal geen afval verzamelden; om die reden is hun gemeten waarde nul. De aanwezigheid van nulwaarden verlaagt het gemiddelde in de rechtse grafiek (Scheveningen). Door te focussen op het tellen van het aantal zichtbare staven en hen paarsgewijs te vergelijken ging Eva voorbij aan het belang van deze nulwaarden en de eigenlijke verdeling van alle datapunten. Dit leidt haar tot de foute conclusie dat de grafiek met meer staven een lager gemiddelde heeft omwille van de bijkomende staven die lagere waarden hebben.



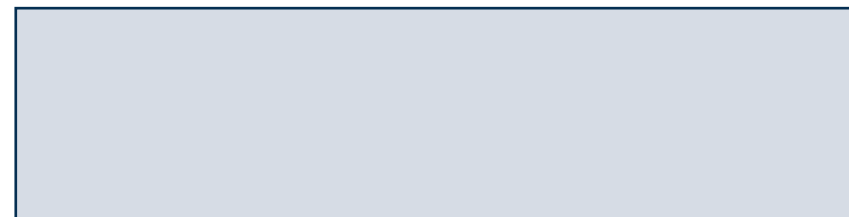


Op welk strand is het gemiddelde gewicht van het verzamelde afval groter?

- a) Het gemiddelde gewicht is het hoogst op Katwijk.
- b) Het gemiddelde gewicht is het hoogst op Noordwijk.
- c) Het gemiddelde gewicht is voor beide ongeveer hetzelfde.

Stel je voor dat een leerling dezelfde systematische fout maakt: te veel nadruk leggen op lokale kenmerken (paarsgewijze vergelijking van staven).

Beschrijf het mogelijke oogbewegingspatroon dat de leerling zou kunnen vertonen. Verwacht je dat deze fout hier optreedt? Waarom (niet)?



Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the National Agency. Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

09 Histogramm

Vignette over een fout op basis van een verwarring tussen frequentie en waarde

Introducing situation



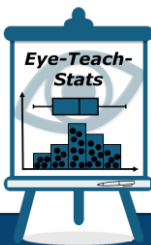
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 4de jaar secundair onderwijs / vierde klas over data-interpretatie. Je geeft je leerlingen de opdracht om bij benadering het gemiddelde te bepalen van de gewichten die in een histogram zijn weergegeven.

Je ziet dat een van je leerlingen, Sophie, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Zij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Sophie aan werkt.



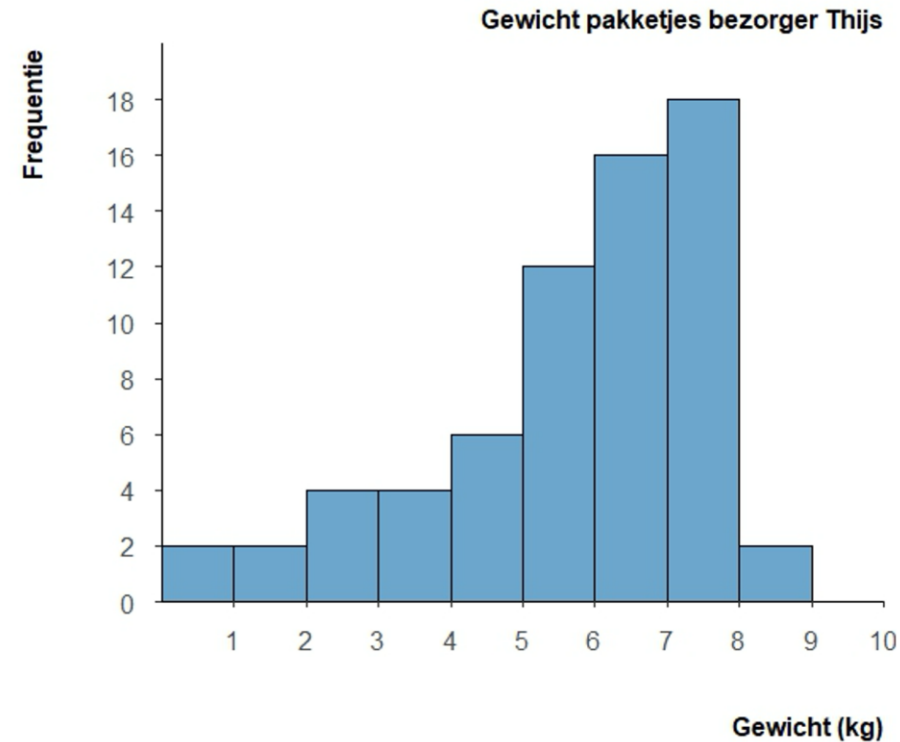
Students task



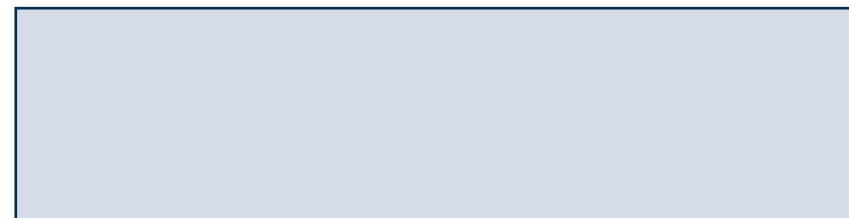
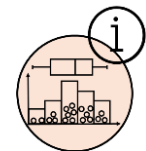
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht van de pakjes die Thijs bezorgt?



Dit is de taak waar Sophie aan werkt. Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.



Introducing eye-tracking

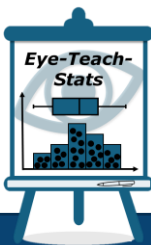


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een oogbewegingsgrafiek krijgen van je leerling Sophie, die gemaakt werd terwijl zij aan de taak werkte. De oogbewegingsgrafiek geeft aan waar haar visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



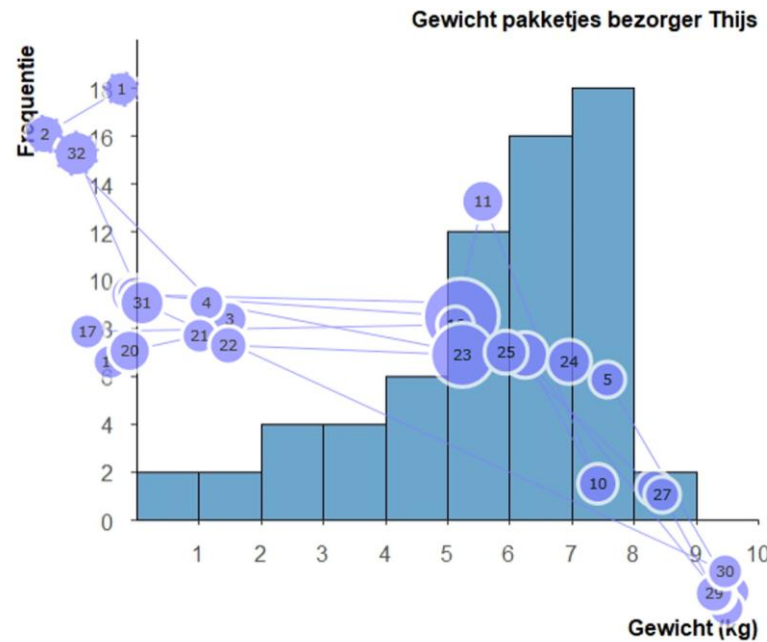
First look



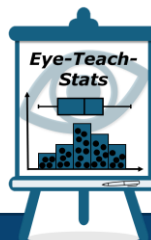
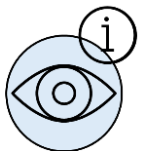
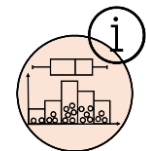
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Sophies antwoord: "Het gemiddelde is ongeveer 8."



Kijk naar de oogbewegingsgrafiek die de oogbewegingen van je leerling Sophie toont en naar haar antwoord.



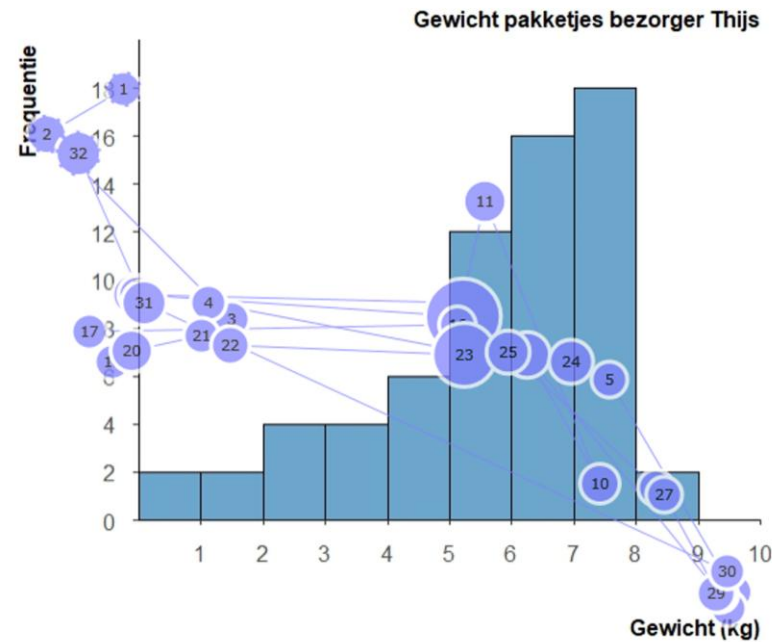
Take perspective



Co-funded by
the European Union

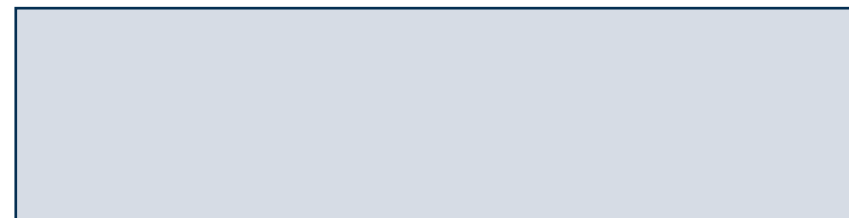
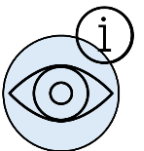
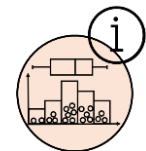
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Sophies antwoord: "Het gemiddelde is ongeveer 8."



Na de taak werd aan Sophie haar eigen oogbewegingsgrafiek getoond. Bij het terugkijken legt zij uit wat zij aan het denken was terwijl zij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Sophie te nemen, en formuleer wat zij gezegd kan hebben.



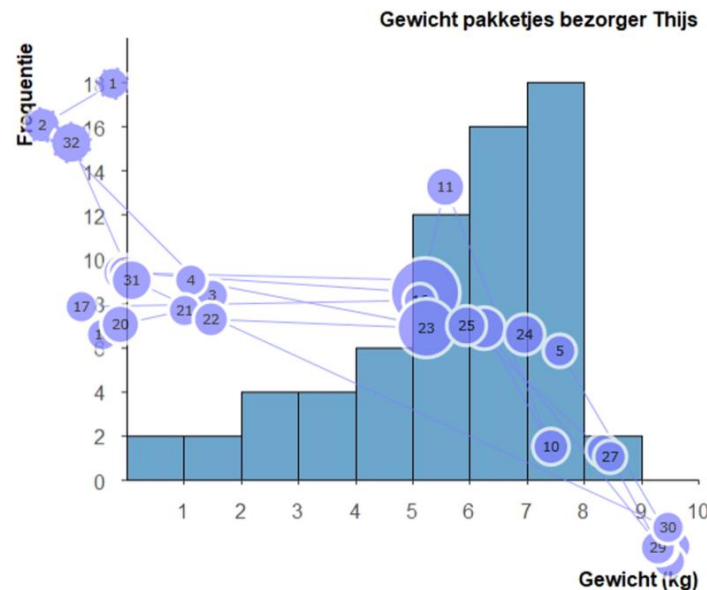
Indicate assumption



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Sophies commentaar: “Ik keek hoe hoog de balken waren in de grafiek om te zien hoe vaak dingen voorkwamen. Daarna probeerde ik te schatten waar het gemiddelde zou liggen op basis daarvan. Ik probeerde ook de balken allemaal even hoog te maken, zodat het makkelijker zou zijn.”

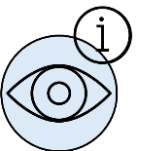
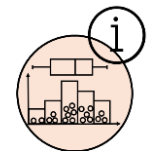


Je kan nu het echte commentaar van Sophie lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.

- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



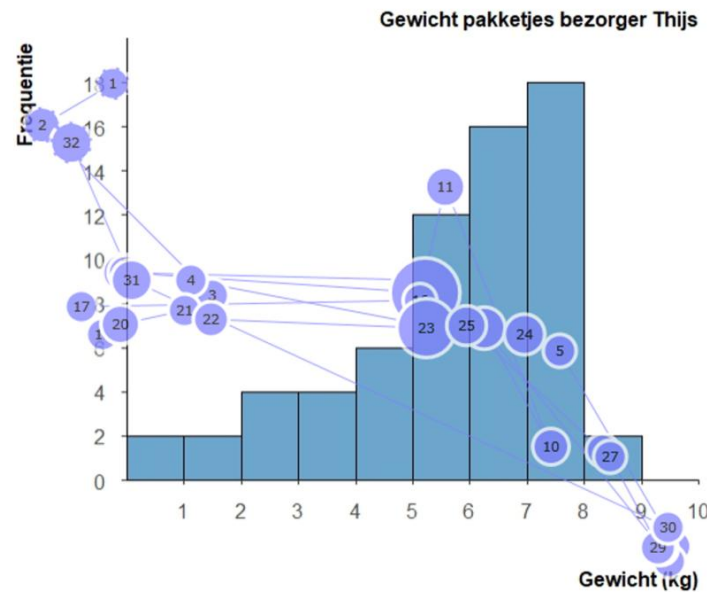
Evaluate solution



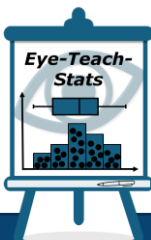
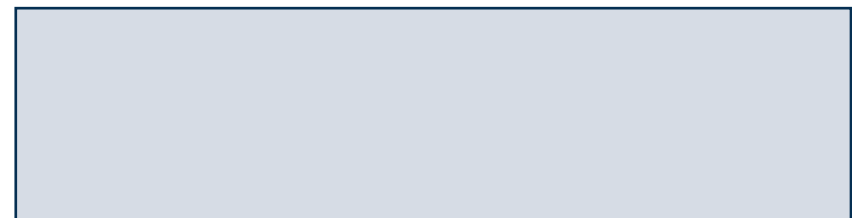
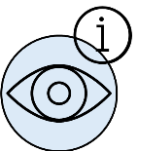
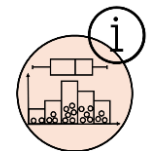
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Sophies commentaar: “Ik keek hoe hoog de balken waren in de grafiek om te zien hoe vaak dingen voorkwamen. Daarna probeerde ik te schatten waar het gemiddelde zou liggen op basis daarvan. Ik probeerde ook de balken allemaal even hoog te maken, zodat het makkelijker zou zijn.”



Evalueer Sophies oplossing. Wat kan je zeggen van haar begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Begrijpen van fouten van leerlingen

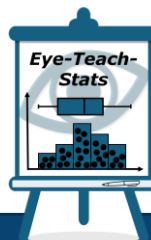
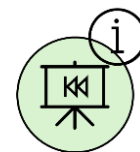
Sophie heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid bij het interpreteren van histogrammen. Die leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd de “**frequentie-waarde-verwarring**”.

Observeerbaar gedrag: Sophie gaf aan dat ze keek naar hoe hoog de staven waren en probeerde te begrijpen hoe vaak bepaalde waarden voorkwamen. Ze probeerde de staven allemaal even hoog te maken om zo het gemiddelde te schatten. De oogbewegingsgrafiek ondersteunt haar beschrijving: haar blik bewoog zich horizontaal – min of meer langs een horizontale lijn – terwijl ze zocht naar het punt op de verticale as dat volgens haar het gemiddelde voorstelde. Dit wijst op een systematische, observeerbare fout, die we omschrijven als frequentie-waarde-verwarring bij het interpreteren van histogrammen.

Interpretatie door docent/onderzoeker: Het lijkt erop dat Sophie een strategie toepaste die gebruikelijk is bij zogenaamde casus-staafdiagrammen (zoals een staafdiagram). Uit haar uitleg en oogbewegingen blijkt dat ze zocht naar een horizontale lijn die alle staven in hoogte zou gelijkmaken. In een histogram geven de staafhoogten echter frequenties weer, niet de gemeten waarden zelf. Sophies aanpak wijst op verwarring over wat de gegevens voorstellen en hoe de assen geïnterpreteerd moeten worden. Bij een histogram toont de horizontale as de gemeten waarden (in dit geval: gewicht in kg), terwijl de verticale as het aantal metingen binnen een bepaald interval (de breedte van de staaf weergeeft. De fout ontstaat wanneer leerlingen de staafhoogten (frequentie) interpreteren als de gemeten waarde in plaats van het aantal waarnemingen binnen dat interval. Hoewel deze strategie onjuist is voor histogrammen, werkt ze wél voor het bepalen van het gemiddelde bij een casus-staafdiagram.

Onderliggende conceptuele moeilijkheid: Sophies systematische fout lijkt voort te komen uit een dieperliggend conceptueel probleem met het idee van data – waar deze zich bevinden, hoe ze worden gepresenteerd en wat ze vertegenwoordigen. Ze maakt geen onderscheid tussen frequenties en gemeten waarden in een histogram. Dit soort verwarring komt vaak voor wanneer leerlingen niet begrijpen dat de verticale as in een histogram het aantal gevallen binnen elk interval toont, niet de gemeten waarde zelf.

Correcte strategieën voor histogrammen: Bij een histogram kan het gemiddelde worden geschat door te zoeken naar het punt op de horizontale as waar de verdeling in evenwicht is. De blik van de leerling zou dan op en neer gaan tussen een punt op de horizontale as en de toppen van de staven – dit vormt een oogbewegingstraject langs een denkbeeldige verticale lijn. Het gemiddelde kan ook berekend worden door het midden van elk interval (dat de waarden in dat interval representeert) te vermenigvuldigen met de bijbehorende frequentie (de hoogte van de staaf), deze producten bij elkaar op te tellen, en vervolgens te delen door de som van de frequenties (het totaal aantal gegevenspunten).

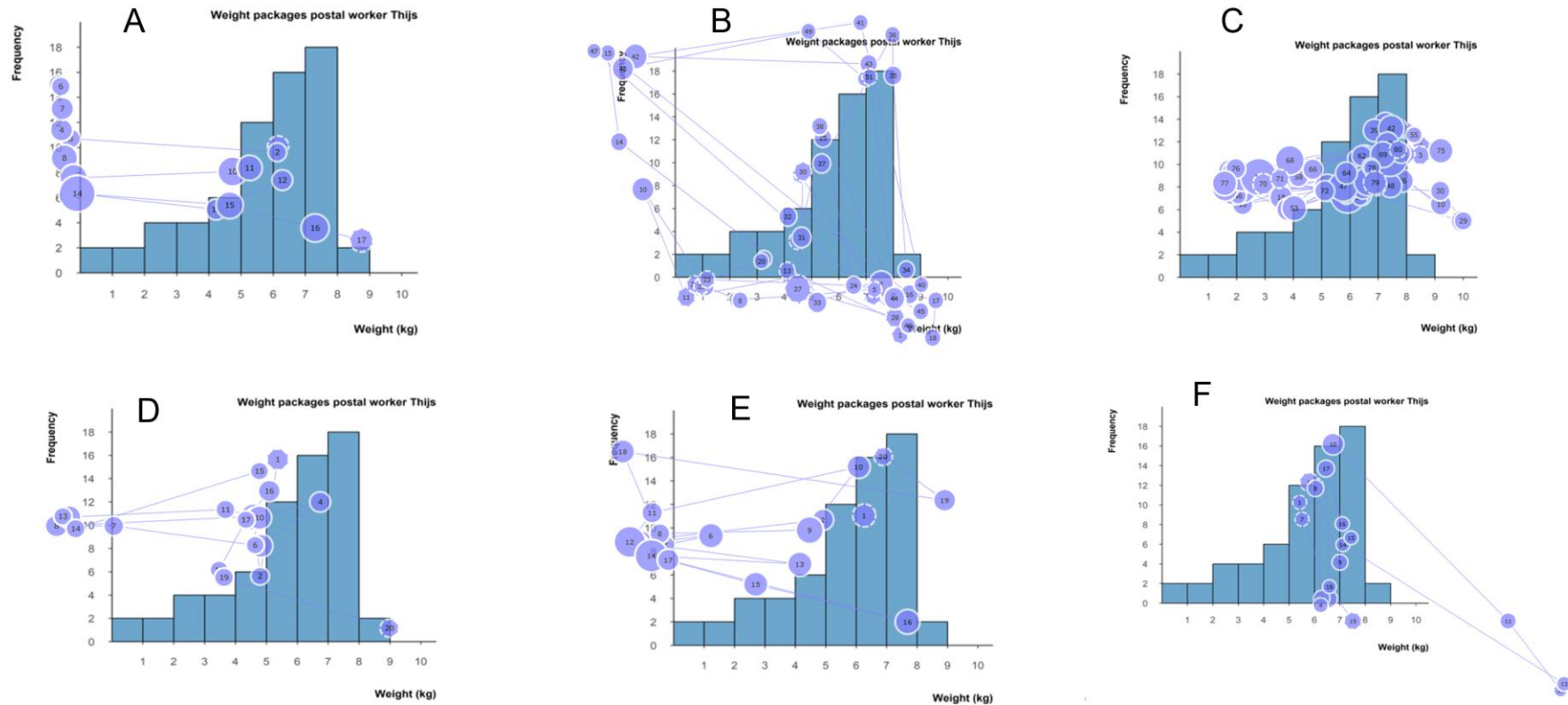


Practice



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.



Bepaal aan de hand van de oogbewegingsgrafieken van zes leerlingen bij dezelfde taak welke leerling waarschijnlijk een systematische fout maakt en frequenties en waarden verwacht.

☐ A

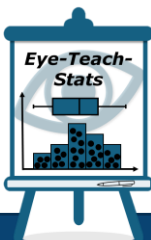
☐ B

☐ C

☐ D

☐ E

☐ F

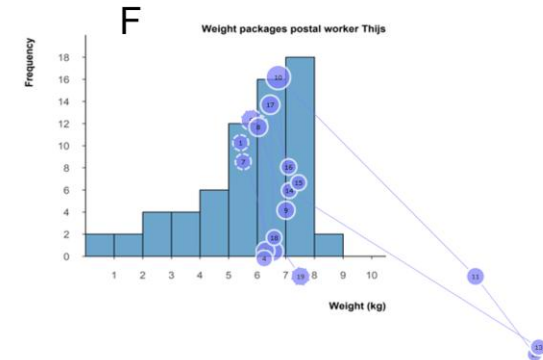
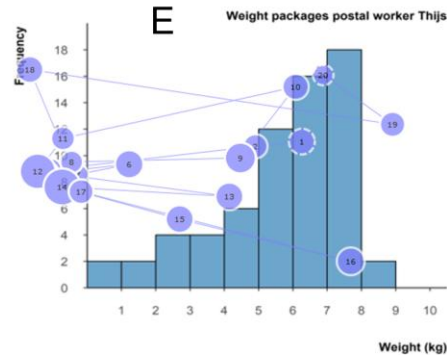
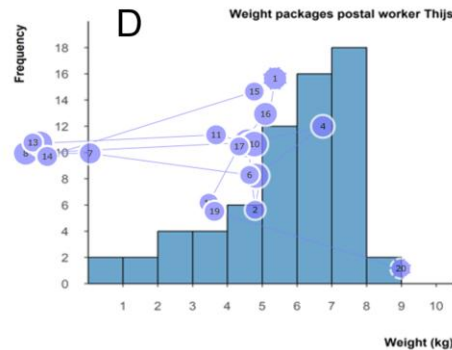
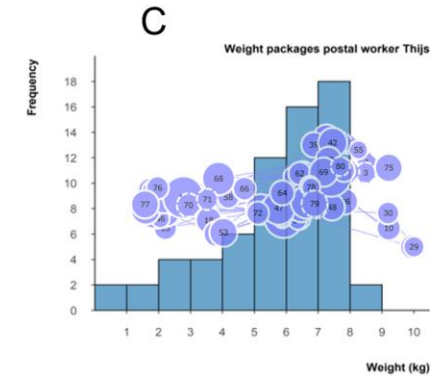
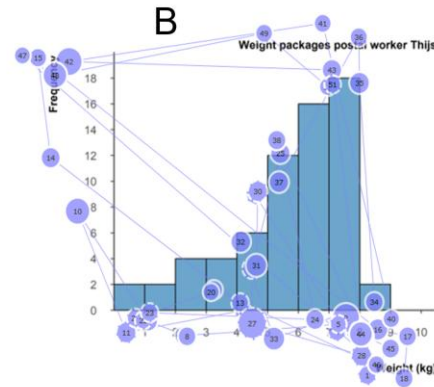
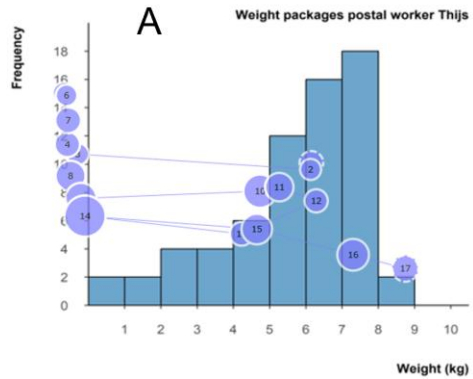


Practice II



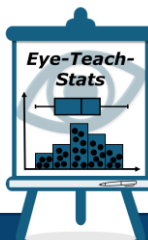
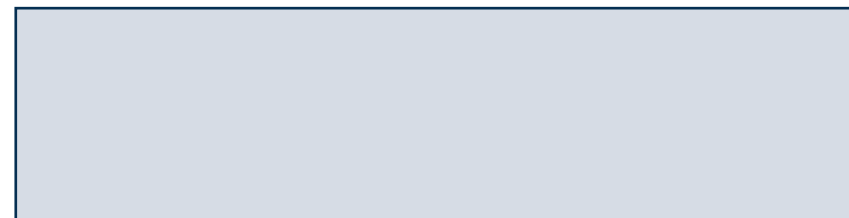
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.



Bepaal aan de hand van de oogbewegingsgrafieken van zes leerlingen bij dezelfde taak welke leerling waarschijnlijk een systematische fout maakt en frequenties en waarden verwacht.

Verantwoord uitgebreid waarom je a) leerling [xy] hebt gekozen, en b) niet voor de andere leerlingen hebt gekozen.



10 Dotplot

Vignette over een fout op basis van een verwarring tussen frequentie en waarde

Introducing situation



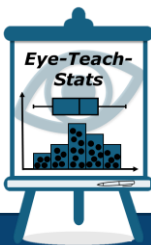
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 6de leerjaar / groep 8 over data-interpretatie. Je leidt leerlingen in in het vergelijken van de verdelingen van data via dotplots/stippendiagrammen.

Je ziet dat een van je leerlingen, Noel, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Hij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Noel aan werkt.



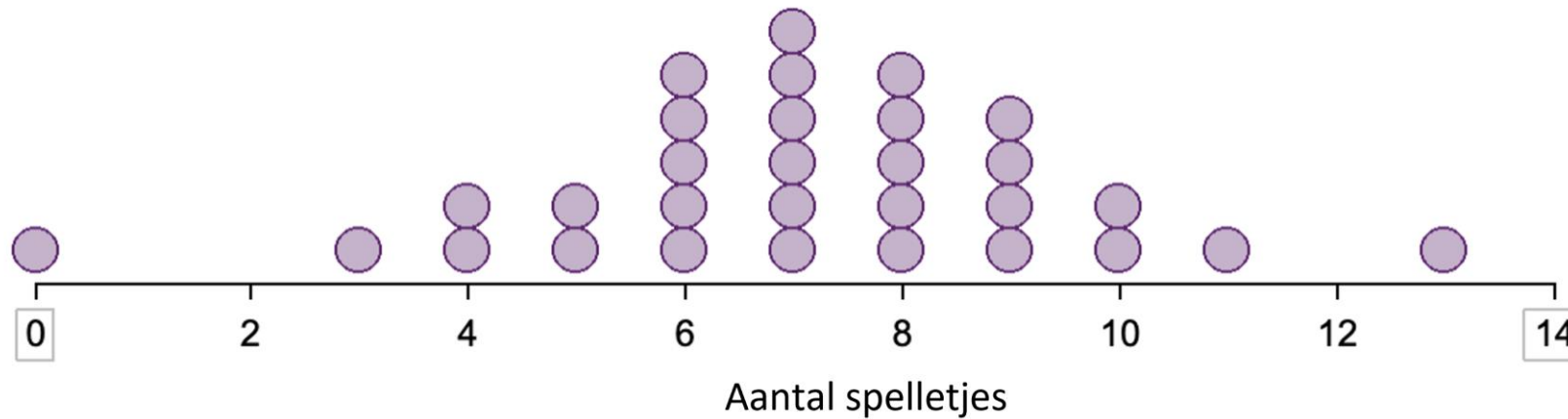
Students task



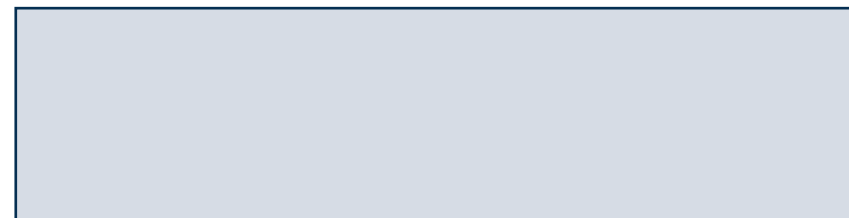
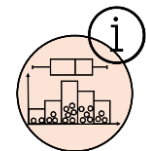
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Alle datapunten stellen samen een verdeling voor. Schat het rekenkundig gemiddelde.



Dit is de taak waar Noel aan werkt. Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.



Introducing eye-tracking

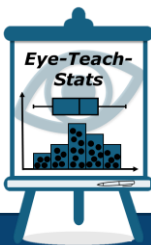


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een oogbewegingsgrafiek krijgen van je leerling Noel, die gemaakt werd terwijl hij aan de taak werkte. De oogbewegingsgrafiek geeft aan waar zijn visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



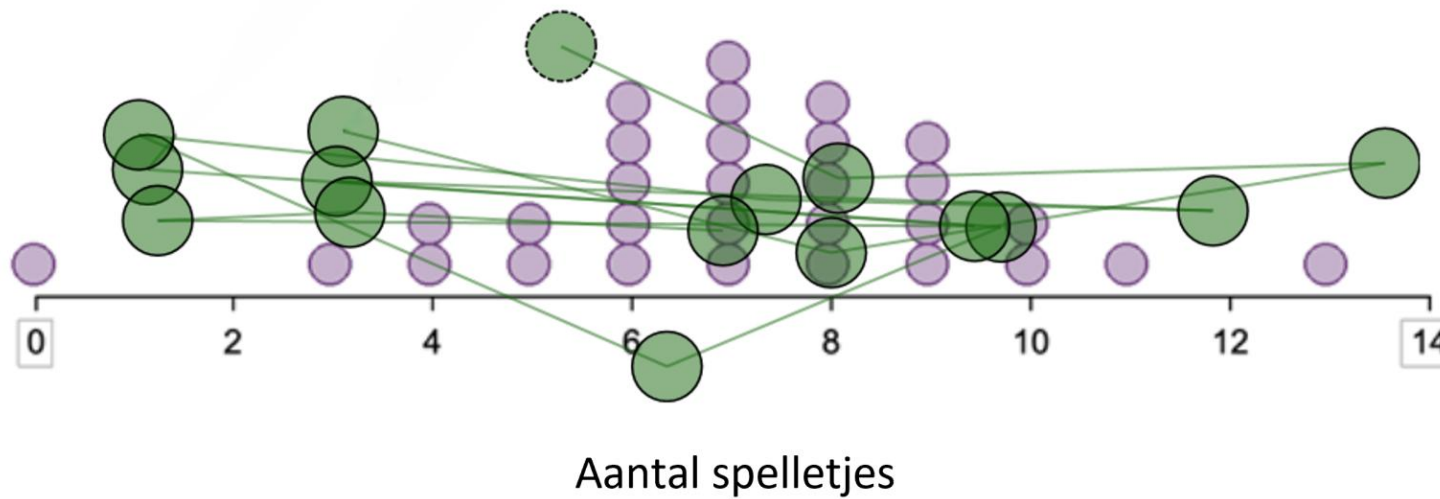
First look



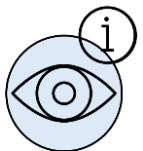
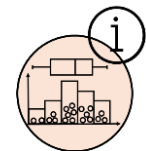
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Noels antwoord: "Het rekenkundige gemiddelde is ongeveer twee."



Kijk naar de oogbewegingsgrafiek die de oogbewegingen van je leerling Noel toont en naar zijn antwoord.



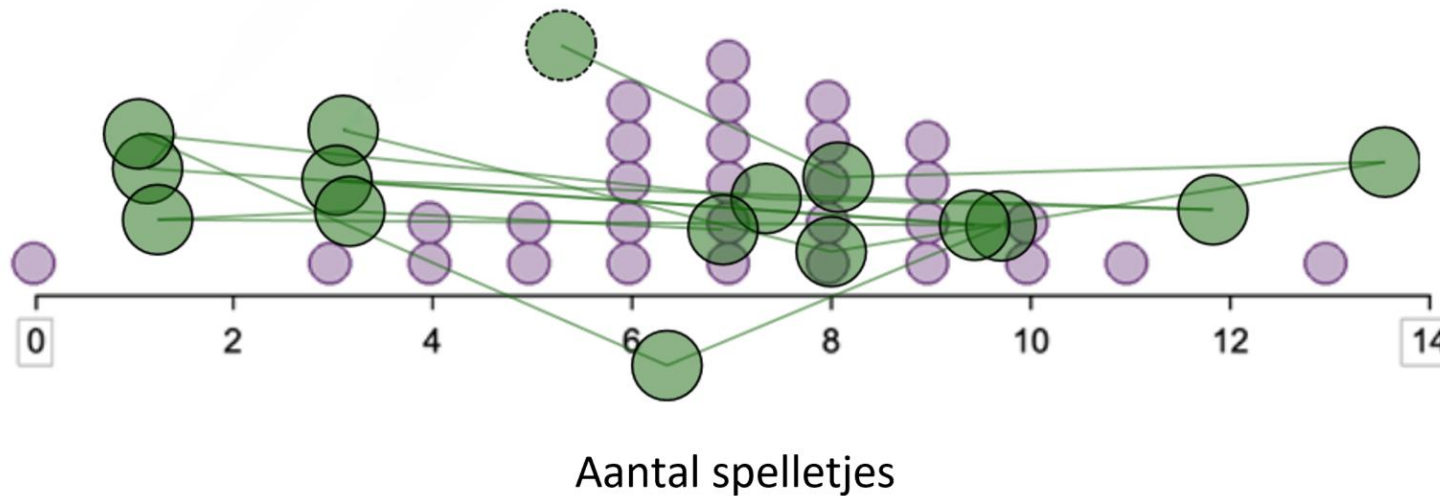
Take perspective



Co-funded by
the European Union

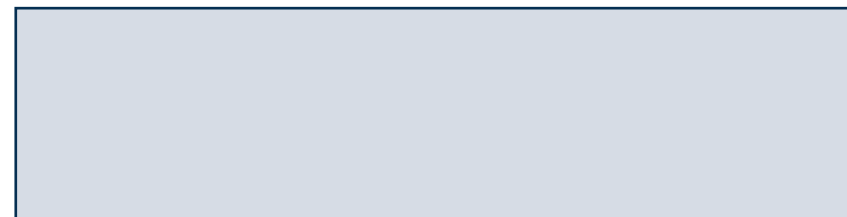
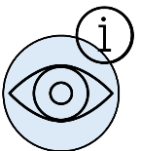
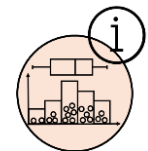
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Noels antwoord: "Het rekenkundige gemiddelde is ongeveer twee."



Na de taak werd aan Noel zijn eigen oogbewegingsgrafiek getoond. Bij het terugkijken legt hij uit wat hij aan het denken was terwijl hij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Noel te nemen, en formuleer wat hij gezegd kan hebben.



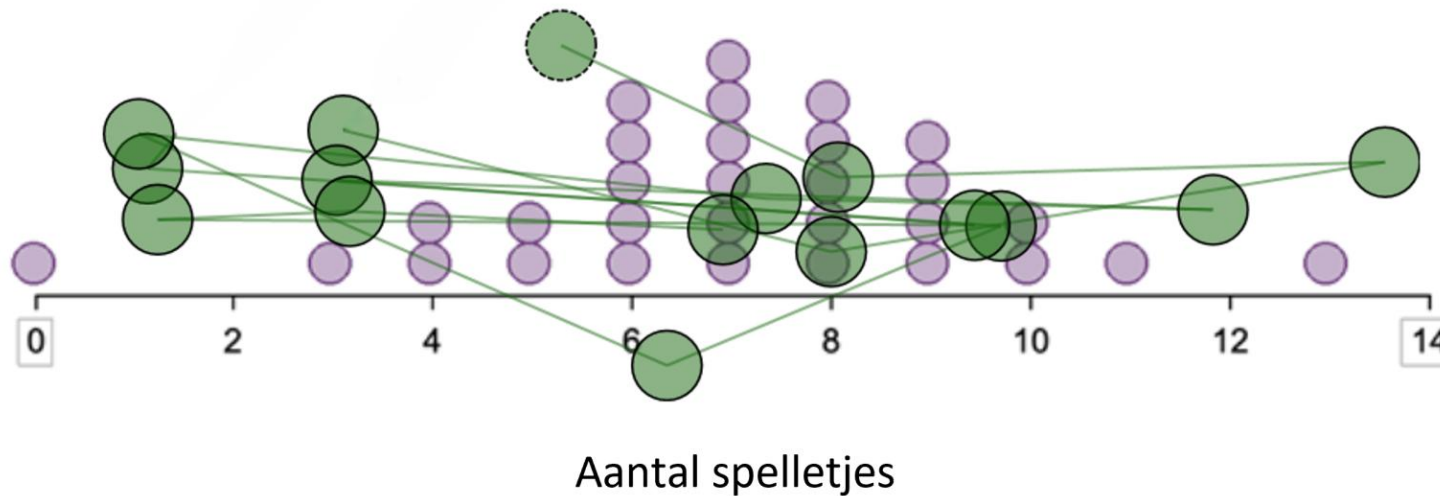
Indicate assumption



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Noels commentaar: “Ik denk dat het twee is omdat wanneer ik er naar kijk, er enkele leerlingen zijn met veel spelletjes en sommige met geen spelletjes. Ik probeerde de stapels even hoog te maken om het rekenkundige gemiddelde te schatten. Dan zijn er overal ongeveer twee bolletjes.”

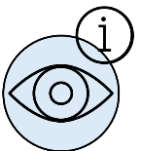
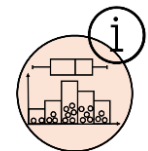


Je kan nu het echte commentaar van Noel lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.

- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



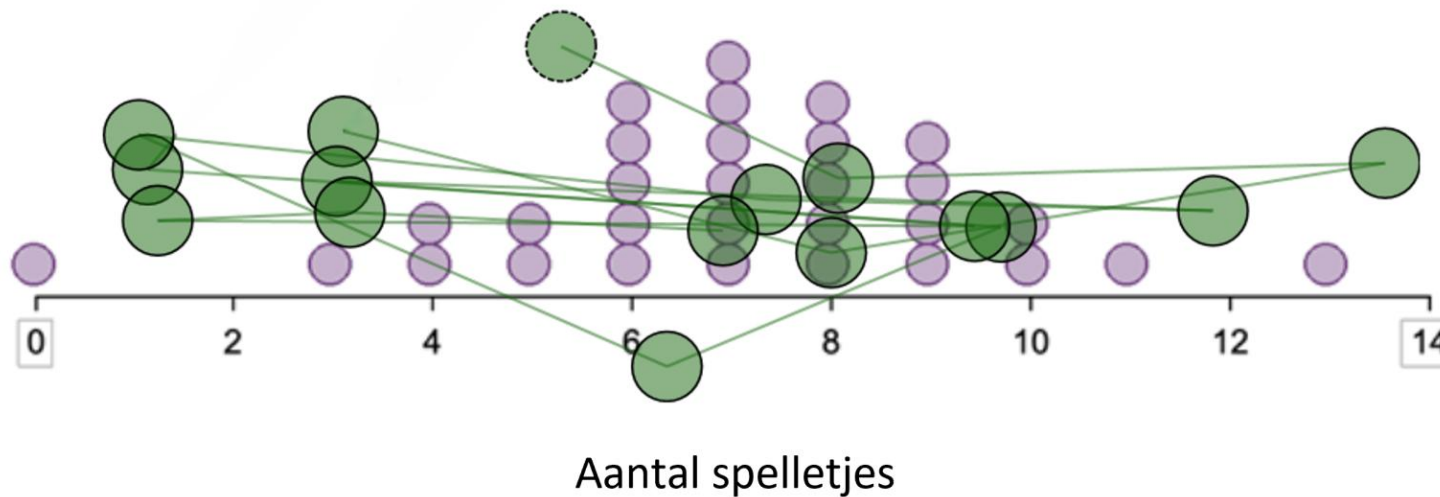
Evaluate solution



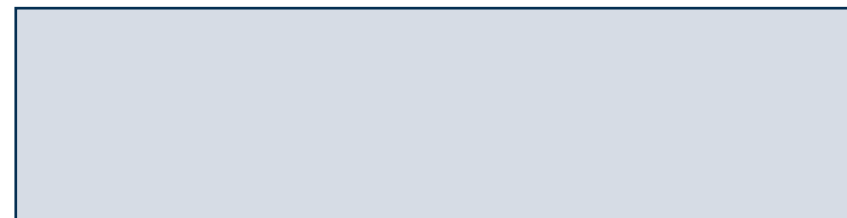
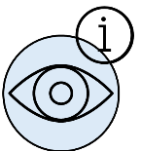
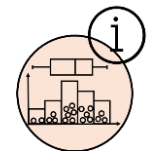
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Noels commentaar: "Ik denk dat het twee is omdat wanneer ik er naar kijk, er enkele leerlingen zijn met veel spelletjes en sommige met geen spelletjes. Ik probeerde de stapels even hoog te maken om het rekenkundige gemiddelde te schatten. Dan zijn er overal ongeveer twee bolletjes."



Evalueer Noels oplossing. Wat kan je zeggen van zijn begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

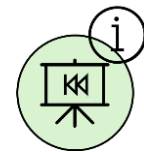
Begrijpen van fouten van leerlingen

Noel heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid met betrekking tot het interpreteren van dot plots. Die leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd “**frequentie-waarde-verwarring**”,

Interpretatie van gedrag: De oogbewegingen van Noel vormen een horizontale lijn binnen de grafiek. Dat suggereert dat Noel zoekt naar het gemiddelde door een punt te vinden op een denkbeeldige verticale as waar de stapels even hoog zijn. Door dat te doen beschouwt hij de hoogten als waarden. Dit leidt tot zijn foute antwoord.

Het begrijpen van de fout en de onderliggende conceptuele moeilijkheid: In een dot plot staat elk bolletje voor één observatie van een waarde op de horizontale as (in dit geval het aantal spelletjes). De hoogte van de stapel (hoeveel bolletjes zijn op elkaar gestapeld) geeft aan hoe vaak elke waarde voorkomt. De fout ontstaat wanneer leerlingen de frequentie (de hoogte van de stapel) beschouwen als een gemeten waarde, in plaats van als het aantal keer dat die waarde voorkomt.

Deze strategie van het vinden van een horizontale “de lijn die alle stapels even hoog maakt” wordt vaak gebruikt en is correct bij het interpreteren van case-value plots. Maar om het gemiddelde in een dot plot te vinden moet elke waarde worden beschouwd en hoe vaak die waarde voorkomt. Dit kan gedaan worden door het zoeken van het balanspunt van de bolletjes volgens hun gemeten waarde. Een mogelijke strategie kan op de volgende pagina worden gevonden.



Estimating mean

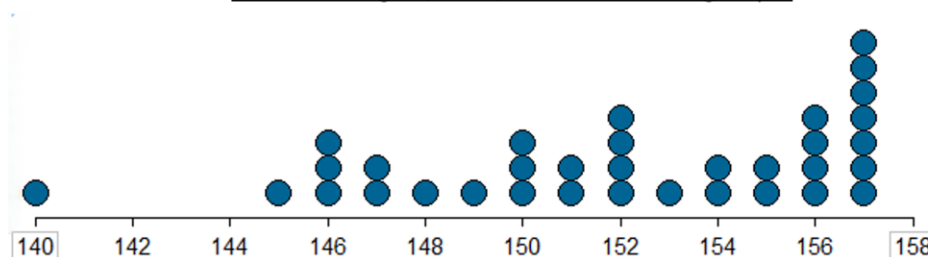


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

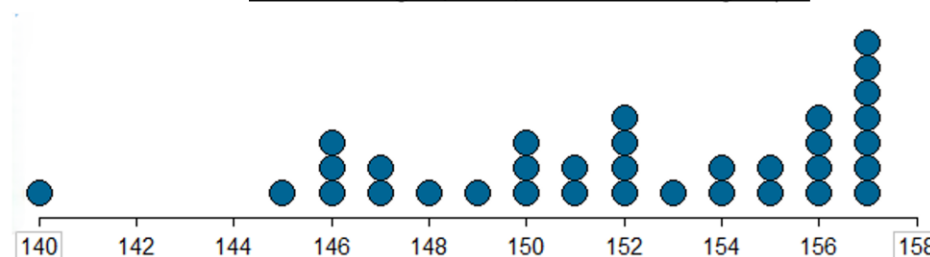
Strategie voor het schatten van het gemiddelde in dotplots:

Lichaamslengte (in cm) van Kinderen in groep 5



Stap 1: Kijk naar de verdeling die wordt getoond in de dot plot.

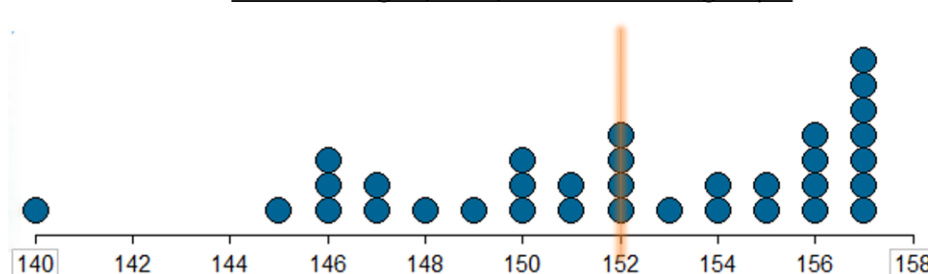
Lichaamslengte (in cm) van Kinderen in groep 5



balanspunt

Stap 2: Probeer het punt te vinden waarop de bolletjes met hun gewicht elkaar uitbalanceren.

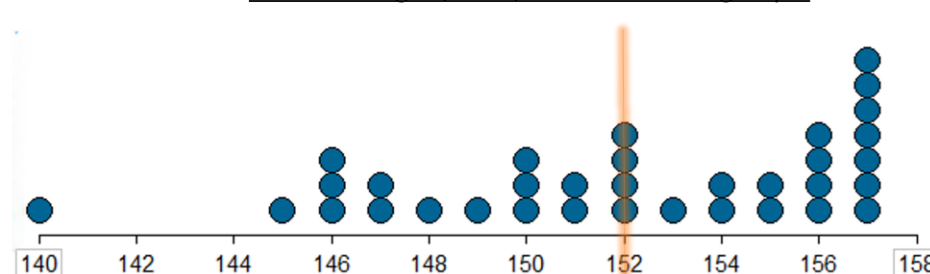
Lichaamslengte (in cm) van Kinderen in groep 5



balanspunt

Stap 3: Dit balanspunt is het gemiddelde van de verdeling,

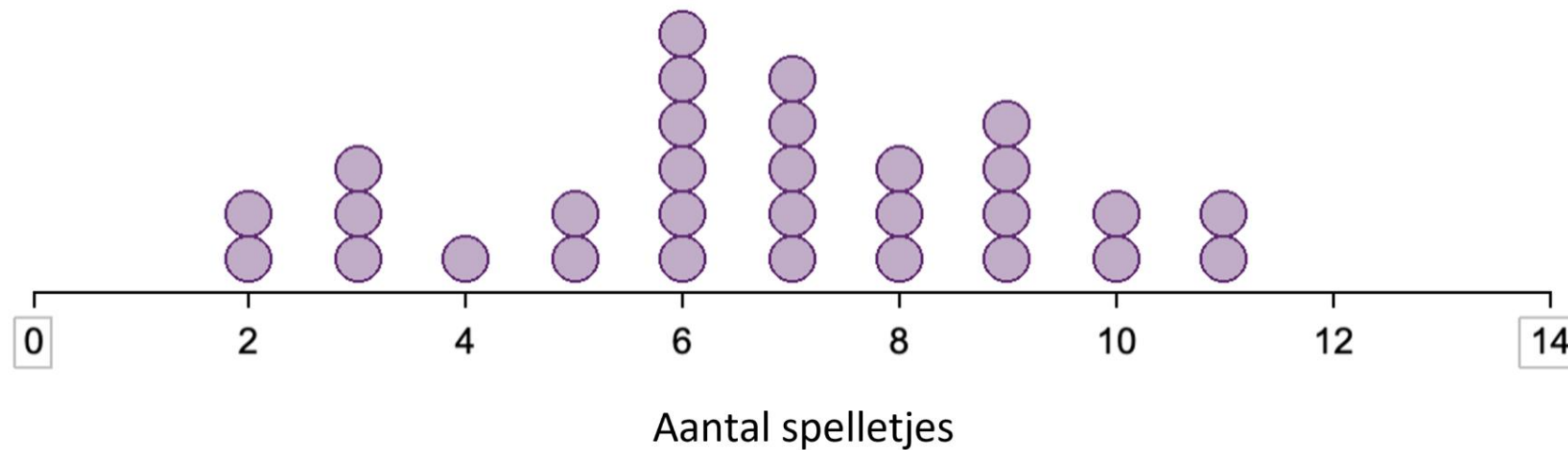
Lichaamslengte (in cm) van Kinderen in groep 5



Geschatte gemiddelde in dot plot

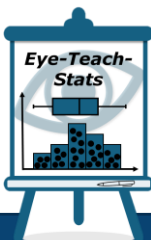
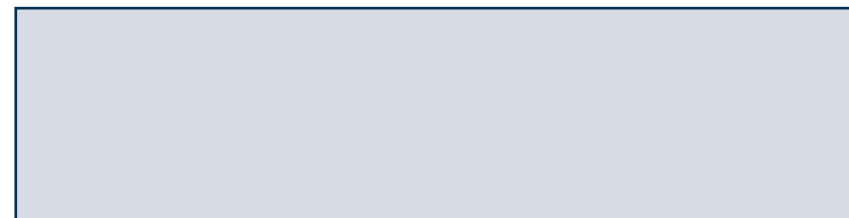


Schat: hoeveel spelletje hebben kinderen gemiddeld op hun telefoon?



Stel je voor dat een leerling dezelfde systematische fout maakt en waarde en frequentie verwart.

Wat zou het antwoord op de volgende taak kunnen zijn? Beschrijf het mogelijke oogbewegingspatroon dat de leerling zou kunnen vertonen.



11 Dotplot

Vignette over een fout op basis van een overgeneralisatie van de som van gemeten waarden

Introducing situation



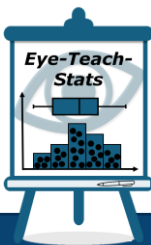
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 6de leerjaar / groep 8 over data-interpretatie. Je leidt leerlingen in in het vergelijken van de verdelingen van data via dotplots/stippendiagrammen.

Je ziet dat een van je leerlingen, Talia, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Zij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Talia aan werkt.



Students task



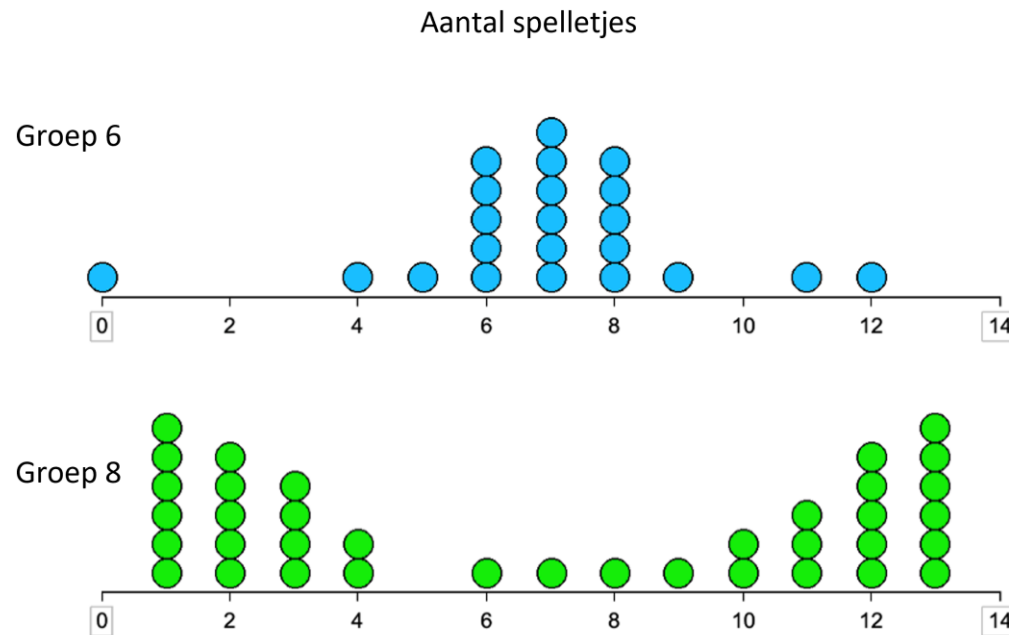
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

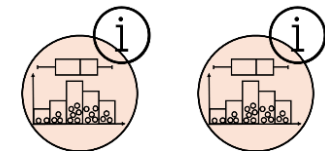
Verschillen leerlingen in groep 6/4de leerjaar en groep 8/6de leerjaar in het aantal spelletjes die ze op hun smartphone hebben? Een enquête werd uitgevoerd over deze vraag met Kinderen uit groep 6 (22 leerlingen) en groep 8 (37 leerlingen).

De data van de steekproeven komen overeen met de aanname dat

- a) kinderen in groep 6 veel meer spelletjes op hun telefoon hebben.
- b) kinderen in groep 8 veel meer spelletjes op hun telefoon hebben.
- c) kinderen in groep 6 en groep 8 ongeveer evenveel spelletjes op hun telefoon hebben.



Dit is de taak waar Talia aan werkt. Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.



- a) kinderen in groep 6 veel meer spelletjes op hun telefoon hebben.
- b) kinderen in groep 8 veel meer spelletjes op hun telefoon hebben.
- c) kinderen in groep 6 en 8 ongeveer evenveel spelletjes op hun telefoon hebben.



Introducing eye-tracking

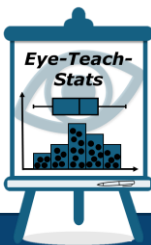


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een oogbewegingsvideo krijgen van je leerling Talia, die gemaakt werd terwijl zij aan de taak werkte. De oogbewegingsvideo geeft aan waar haar visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



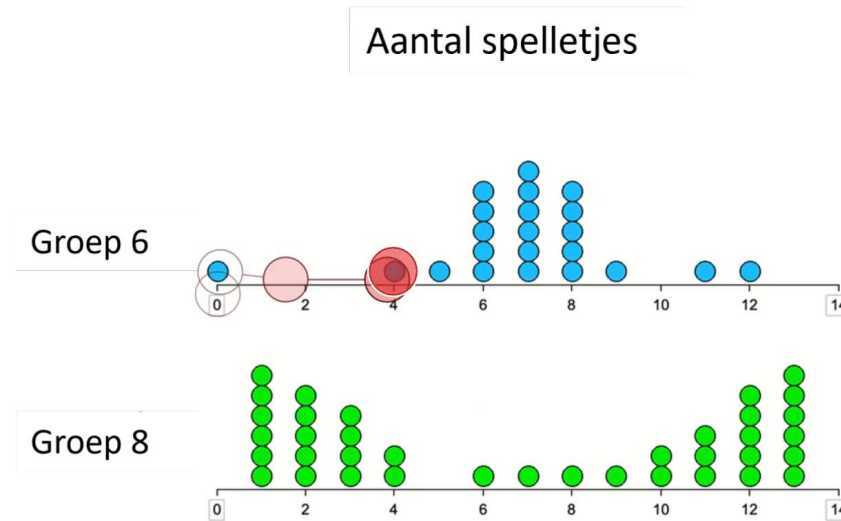
First look



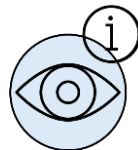
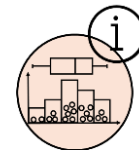
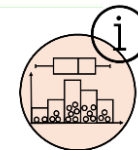
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Talia's antwoord: "Ik zou dus zeggen dat b) het correcte antwoord is. Leerlingen in groep 8 hebben veel meer spelletjes op hun telefoon."



Kijk naar de oogbewegingsvideo die de oogbewegingen van je leerling Talia toont en naar haar antwoord.



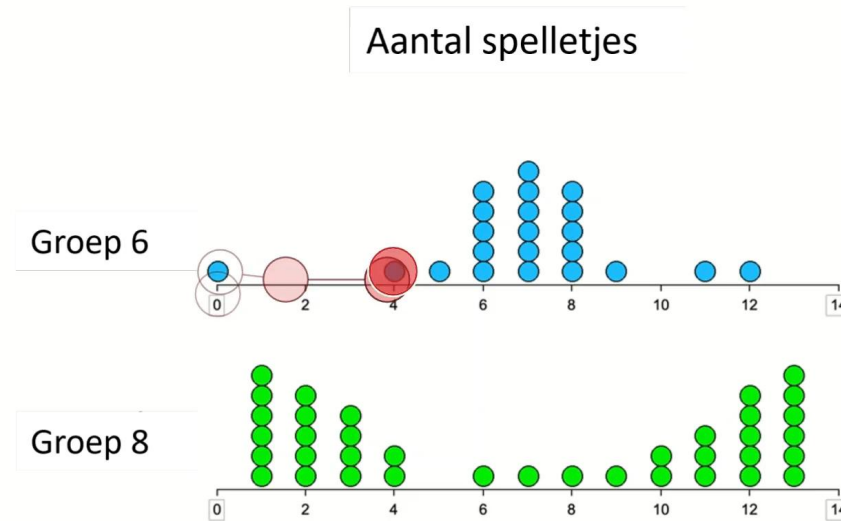
Take perspective



Co-funded by
the European Union

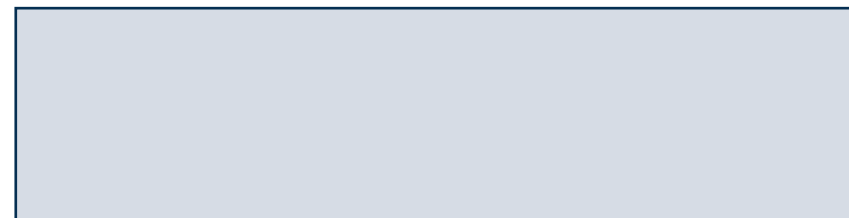
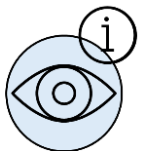
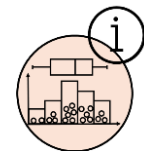
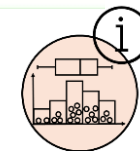
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Talia's antwoord: "Ik zou dus zeggen dat b) het correcte antwoord is. Leerlingen in groep 8 hebben veel meer spelletjes op hun telefoon."



Na de taak werd aan Talia haar eigen oogbewegingsvideo getoond. Bij het terugkijken legt zij uit wat zij aan het denken was terwijl zij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Talia te nemen, en formuleer wat zij gezegd kan hebben.



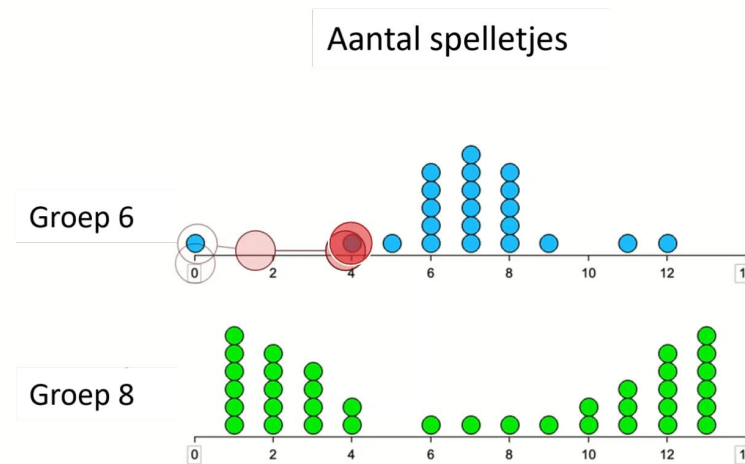
Indicate assumption



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Talia's commentaar: “Eerst telde ik vier plus vijf, wat negen is. Hier telde ik vijf mensen die zes spelletjes hebben, en berekende vijf maal zes, wat dertig is. Dan telde ik de negen van eerder er bij, wat in totaal 39 is. Dan telde ik en hier telde ik 9, 11 en 13 op, wat een totaal van 134 spelletjes voor leerlingen in groep 6 gaf. Voor groep 8 telde ik 6 keer 13 plus 5 keer 12 en dat was al meer dan wat de leerlingen in groep 6 hebben.”

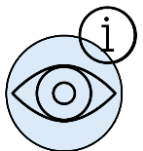
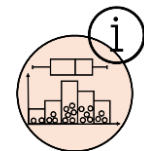
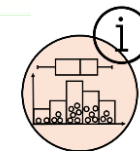


Je kan nu het echte commentaar van Talia lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.

- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



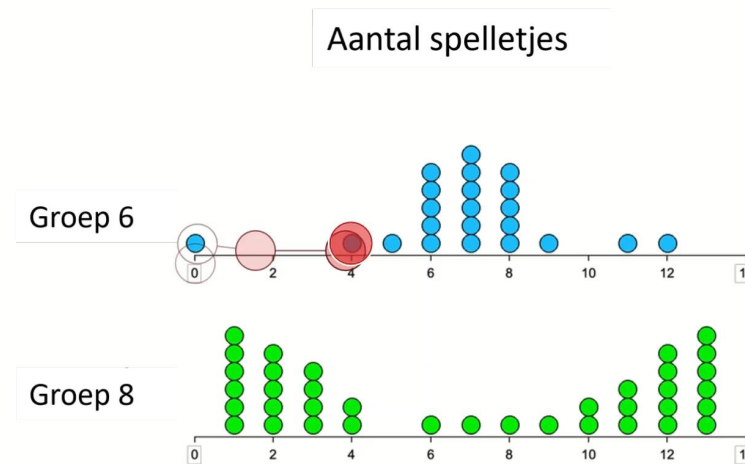
Evaluate solution



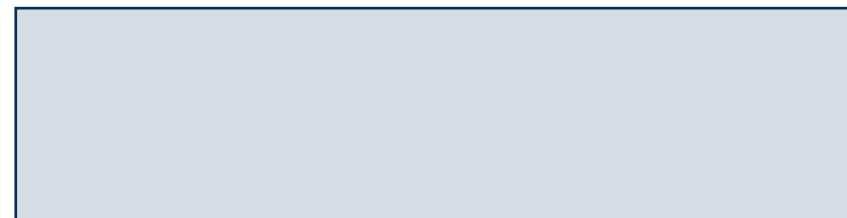
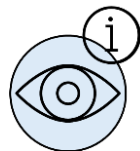
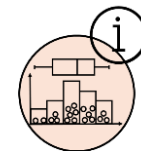
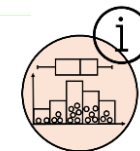
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Talia's commentaar: "Eerst telde ik vier plus vijf, wat negen is. Hier telde ik vijf mensen die zes spelletjes hebben, en berekende vijf maal zes, wat dertig is. Dan telde ik de negen van eerder er bij, wat in totaal 39 is. Dan telde ik en hier telde ik 9, 11 en 13 op, wat een totaal van 134 spelletjes voor leerlingen in groep 6 gaf. Voor groep 8 telde ik 6 keer 13 plus 5 keer 12 en dat was al meer dan wat de leerlingen in groep 6 hebben."



Evalueer Talia's oplossing. Wat kan je zeggen van haar begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Begrijpen van fouten van leerlingen

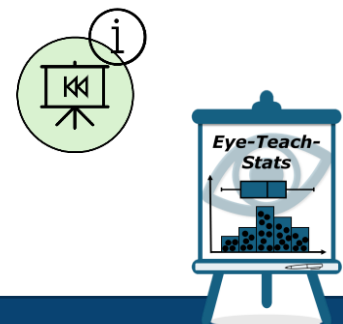
Talia heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid met betrekking tot het interpreteren van dot plots. Die leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd “som van gemeten waarden als het gemiddelde”.

Interpretatie van het gedrag: Ze berekende en vergeleek het totale aantal spelletjes (gemeten waarden) tussen de twee verdelingen met ongelijke steekproefgrootten. Talia's oogbewegingsdata en haar antwoorden wijzen op een sterke fixatie op individuele datapunten.

Het begrijpen van de fout en de onderliggende conceptuele moeilijkheid: Echter, wanneer je steekproeven van een verschillende grootte vergelijkt, dan moeten de frequenties in relatie tot elkaar worden bekeken, bijvoorbeeld door het gemiddelde te gebruiken. Dit type fout komt vaak voor door moeilijkheden met het concept verdeling en het selecteren van de juiste strategieën voor hun vergelijking.

Een centraal doel in het statistiekonderwijs is om leerlingen te helpen om een “globaal beeld” te krijgen van verdelingen. In dit beeld zien leerlingen verdelingen als conceptuele entiteiten met algemene kenmerken zoals een centrum, spreiding en vorm. Maar veel leerlingen hebben een “lokaal beeld” en zien verdelingen enkel als verzamelingen van individuele datapunten. Dit leidt hen ertoe om te veel te focussen op lokale details van de verdeling. De systematische fout doet zich voor in dit onterechte gebruik van een “lokaal beeld”.

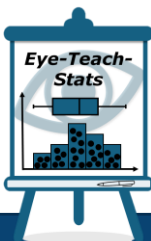
Op de volgende slide kan je een overzicht zien van lokale en globale kenmerken die meegenomen kunnen worden bij het vergelijken van verdelingen.



Perspectieven op de verdelingen van data: lokaal vs. globaal beeld

Globaal beeld ↓	Verdeling (conceptuele entiteit)			↑ Lokaal beeld
	Globale kenmerken			
	centrum <i>Visueel geschat gemiddelde...</i>	Spreiding/dichtheid <i>Geobserveerde uitgespreidheid, meerderheid, bereik, ...</i>	Vorm <i>Geobserveerde scheefheid, pieken, staarten...</i>	
	Lokale kenmerken Individuele datapunten <i>Extreme waarden, uitbijters, absolute frequentie van bolletjes in bepaalde intervallen, waarde van bepaalde intervallen, waarden los van de verdeling aan de uiteinden ...</i>			

Aangepast naar Schreiter & Vogel, 2023



12 Histogram

Vignette over een fout op basis van een overgeneralisatie
van de som van frequenties

Introducing situation



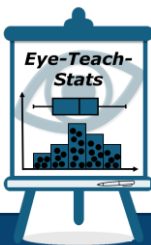
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 4de jaar secundair onderwijs / vierde klas over data-interpretatie. Je geeft je leerlingen de opdracht om bij benadering het gemiddelde te bepalen van de gewichten die in een histogram zijn weergegeven.

Je ziet dat een van je leerlingen, Mustafa, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Hij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Mustafa aan werkt.



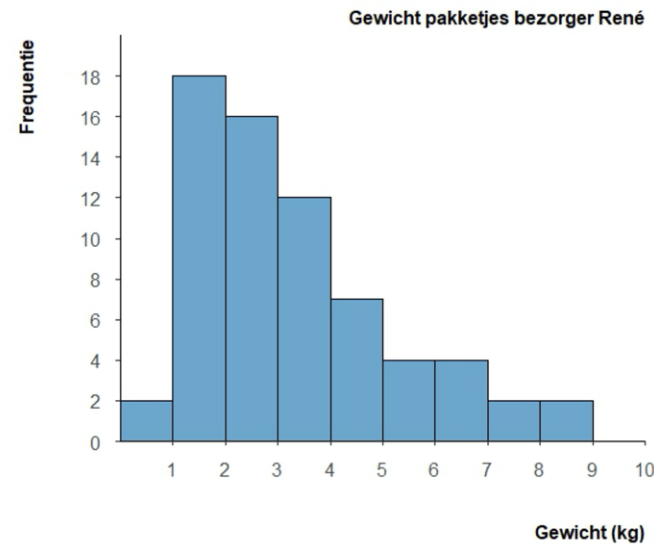
Students task



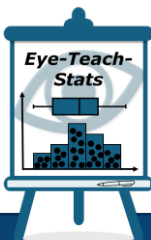
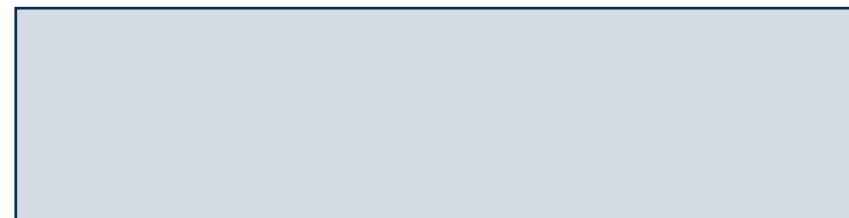
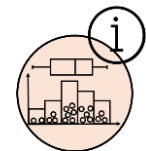
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht van de pakjes die René bezorgt?



Dit is de taak waar Mustafa aan werkt. Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.



Introducing eye-tracking

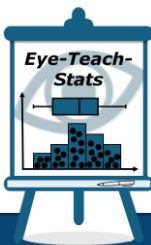


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een oogbewegingsvideo krijgen van je leerling Mustafa, die gemaakt werd terwijl hij aan de taak werkte. De oogbewegingsvideo geeft aan waar zijn visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



First look

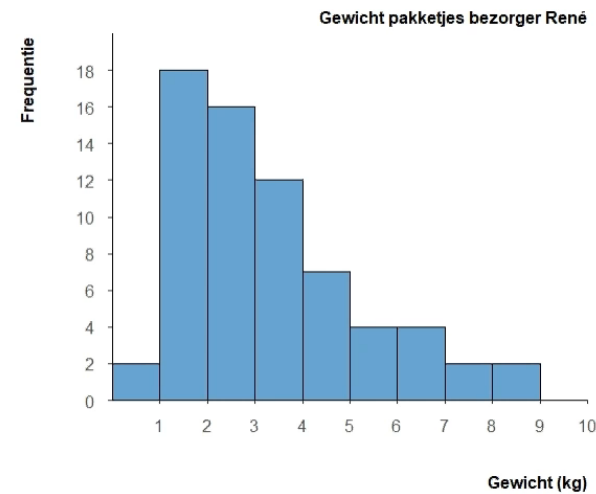


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

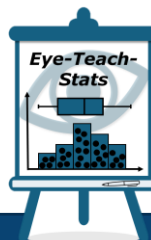
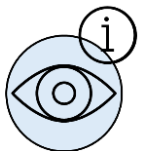
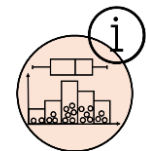
Mustafa's antwoord: "Het gemiddelde is ongeveer zeven."

Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht van de pakketjes die René bezorgt?



Volgende

Kijk naar de oogbewegingsvideo die de oogbewegingen van je leerling Mustafa toont en naar zijn antwoord.



Take perspective

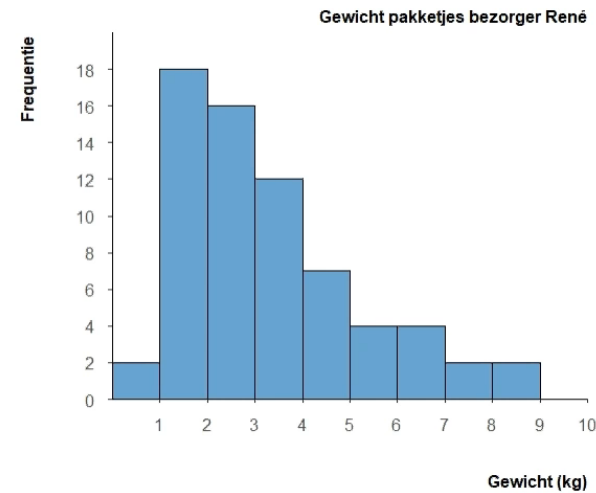


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Mustafa's antwoord: "Het gemiddelde is ongeveer zeven."

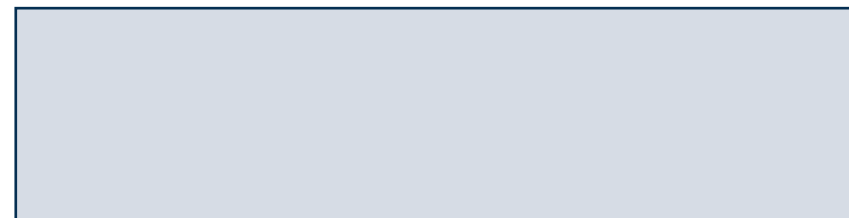
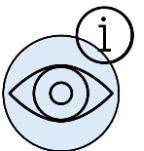
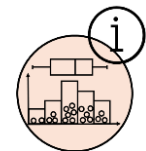
Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht van de pakketjes die René bezorgt?



Volgende

Na de taak werd aan Mustafa zijn eigen oogbewegingsvideo getoond. Bij het terugkijken legt hij uit wat hij aan het denken was terwijl hij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Mustafa te nemen, en formuleer wat hij gezegd kan hebben.



Indicate assumption

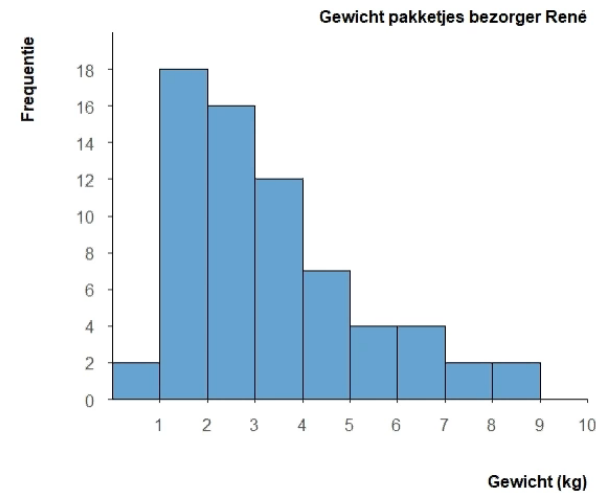


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Mustafa's commentaar: "Ik heb alle frequenties bij elkaar opgeteld en daarna gedeeld door negen. En toen kreeg ik een getal dat ongeveer het gemiddelde zou moeten zijn."

Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht van de pakketjes die René bezorgt?



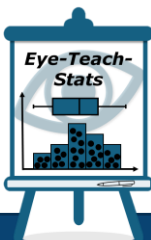
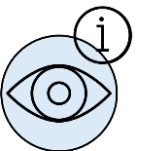
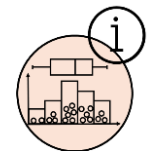
Volgende

Je kan nu het echte commentaar van Mustafa lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.

- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



Evaluate solution

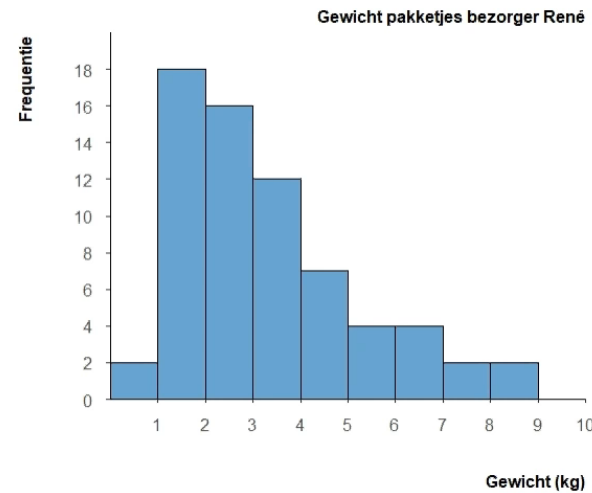


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

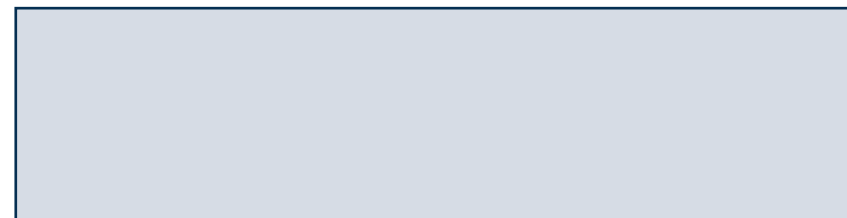
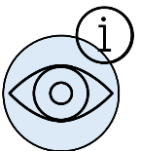
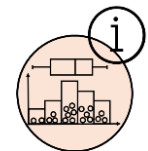
Mustafa's commentaar: "Ik heb alle frequenties bij elkaar opgeteld en daarna gedeeld door negen. En toen kreeg ik een getal dat ongeveer het gemiddelde zou moeten zijn."

Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht van de pakketjes die René bezorgt?



Volgende

Evalueer Mustafa's oplossing. Wat kan je zeggen van zijn begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Begrijpen van fouten van leerlingen

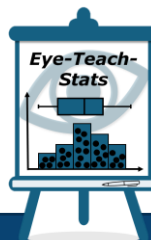
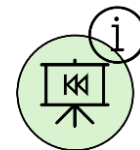
Mustafa heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid bij het interpreteren van histogrammen. Die leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd het “som voor gemiddelde: **som van frequenties**”.

Observeerbaar gedrag: Mustafa gaf aan dat hij de frequenties bij elkaar optelde en vervolgens de uitkomst deelde door het aantal staven, in de veronderstelling dat dit het gemiddelde zou opleveren. We kunnen ook observeren dat Mustafa's blik na verloop van tijd heen en weer bewoog tussen de hoogtes van de staven en de frequentiewaarden langs de y-as. Bij sommige frequenties geeft een groeiende stip aan dat hij daar langer naar keek. Vervolgens verschuift zijn blik naar de x-as, waar hij bijzondere aandacht besteedt aan het getal 9, dat overeenkomt met het totale aantal staven in het histogram.

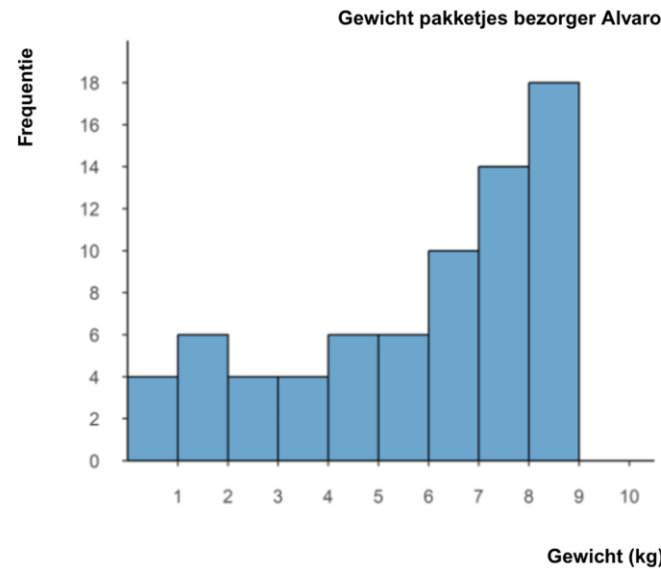
Interpretatie door de docent/onderzoeker: Zijn uitleg suggereert dat hij de hoogte van de staven – die de frequenties weergeven – behandelde alsof het de gemeten waarden zelf waren. Zijn kijkpatroon suggereert dat hij alle frequenties (gegeven door de staafhoogtes) optelde en vervolgens door 9 deelde om te komen tot wat hij dacht dat het rekenkundig gemiddelde was. De groeiende stip duidt er waarschijnlijk op dat Mustafa aan het nadenken was – hier waarschijnlijk omdat hij de frequenties in zijn hoofd aan het optellen was. In een histogram toont de horizontale as de gemeten waarden (in dit geval het gewicht in kg), terwijl de verticale as de frequentie van metingen binnen een specifiek interval (de klassebreedte van de staaf) weergeeft. De fout ontstaat wanneer leerlingen de hoogte van de staven (frequentie) interpreteren als de gemeten waarde, in plaats van als een weergave van hoeveel metingen er binnen een bepaald bereik vallen. Hoewel deze strategie onjuist is voor histogrammen, is ze wél correct bij een casus-staafdiagram (zoals een staafdiagram). Mustafa's aanpak weerspiegelt verwarring tussen frequentie en gemeten waarde.

Onderliggende conceptuele moeilijkheid: Mustafa's systematische fout is waarschijnlijk het gevolg van een onderliggende conceptuele moeilijkheid met het begrip data – waar, hoe en wat er wordt weergegeven – doordat hij geen onderscheid maakt tussen frequenties en gemeten waarden in een histogram. Dergelijke conceptuele moeilijkheden komen vaak voor wanneer leerlingen niet begrijpen dat de verticale as in een histogram weergeeft hoeveel gevallen er binnen elke klasse vallen, en niet de gemeten waarde zelf.

Correcte strategieën voor histogrammen: In een histogram kan het gemiddelde worden geschat door het punt op de horizontale as te vinden waar het histogram (de verdeling) in balans is. In dat geval zou de blik op en neer bewegen tussen een punt op de horizontale as en de toppen van de staven, wat een kijkpatroon oplevert langs een denkbeeldige verticale lijn. Het gemiddelde kan ook worden geschat via een berekening: door het midden van elke klasse (dat de gemeten waarden binnen die klasse vertegenwoordigt) te vermenigvuldigen met de bijbehorende frequentie (de hoogte van de staaf), deze producten op te tellen en vervolgens te delen door de som van de frequenties (het totale aantal datapunten).

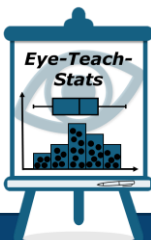
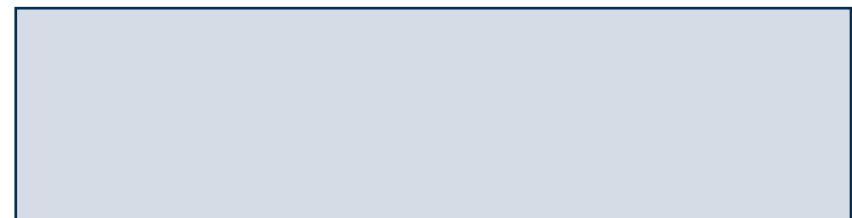


Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht van de pakketjes die Alvaro bezorgt?



Stel je voor dat een leerling dezelfde systematische fout maakt en de som van de frequenties gebruikt voor het gemiddelde.

Beschrijf het mogelijke oogbewegingspatroon dat de leerling zou kunnen vertonen. Verwacht je dat deze fout hier optreedt? Waarom (niet)?



Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the National Agency. Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

13 Histogram

Vignette over een fout op basis van het overbenadrukken
van het aantal staven

Introducing situation



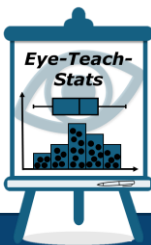
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 4de jaar secundair onderwijs / vierde klas over data-interpretatie. Je leidt leerlingen in in het vergelijken van de verdelingen van data via histogrammen.

Je ziet dat een van je leerlingen, Finn, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Hij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Finn aan werkt.

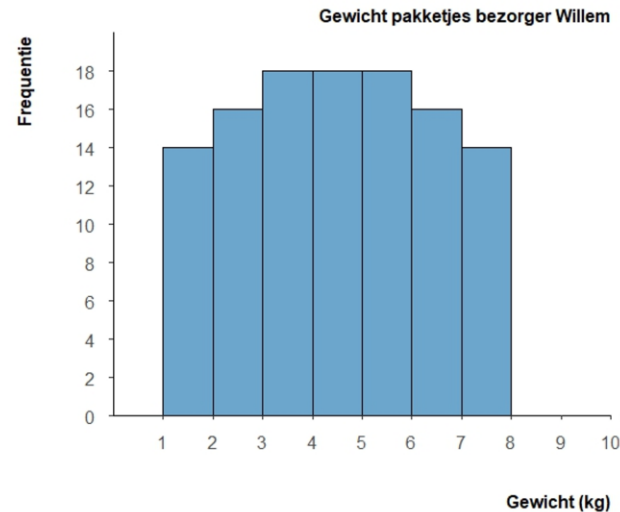
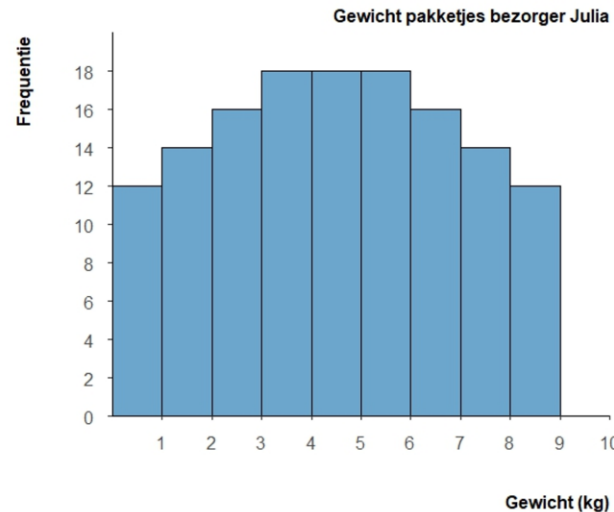


Students task



Co-funded by
the European Union

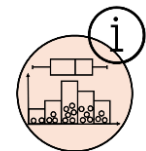
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.



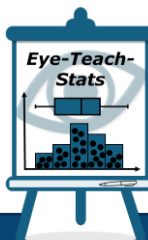
Welke postbezorger bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten?

- a) Julia bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten.
- b) Willem bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten.
- c) Het gemiddelde gewicht is ongeveer gelijk voor beiden.

Dit is de taak waar Finn aan werkt. Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.



- a) Julia bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten.
- b) Willem bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten.
- c) Het gemiddelde gewicht is ongeveer gelijk voor beiden.



Introducing eye-tracking

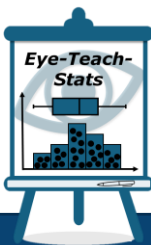


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een oogbewegingsvideo krijgen van je leerling Finn, die gemaakt werd terwijl hij aan de taak werkte. De oogbewegingsvideo geeft aan waar zijn visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



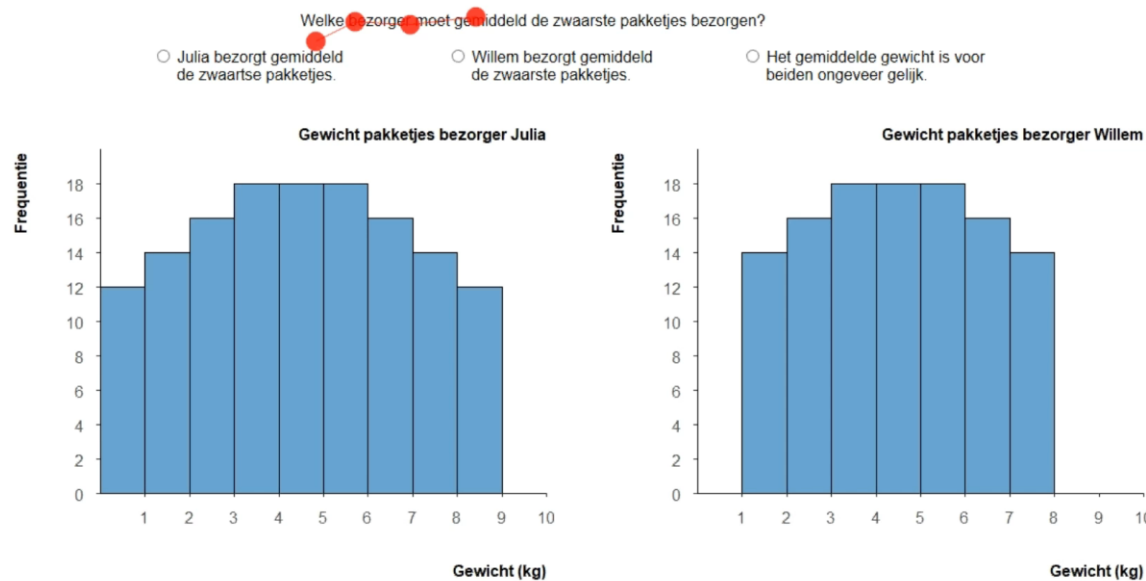
First look



Co-funded by
the European Union

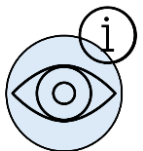
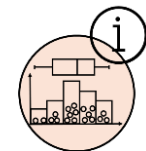
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Finns antwoord: "Julia bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketjes."



Volgende
Volgende

Kijk naar de oogbewegingsvideo die de oogbewegingen van je leerling Finn toont en naar zijn antwoord.



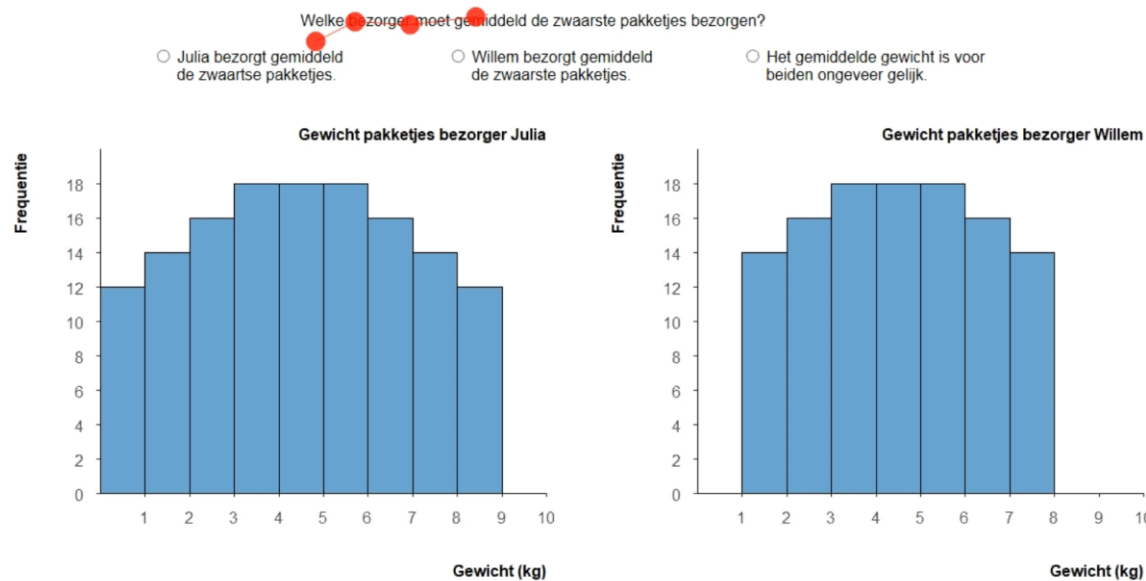
Take perspective



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

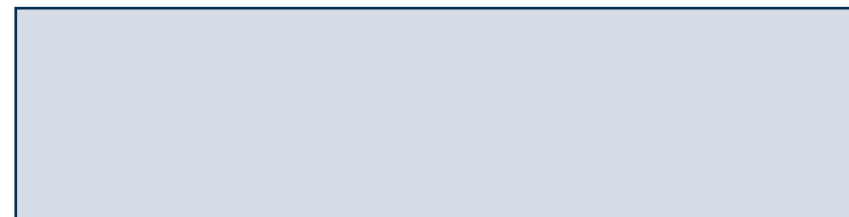
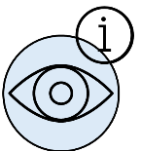
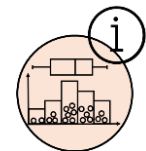
Finns antwoord: "Julia bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketjes."



Volgende
Volgende

Na de taak werd aan Finn zijn eigen oogbewegingsvideo getoond. Bij het terugkijken legt hij uit wat hij aan het denken was terwijl hij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Finn te nemen, en formuleer wat hij gezegd kan hebben.



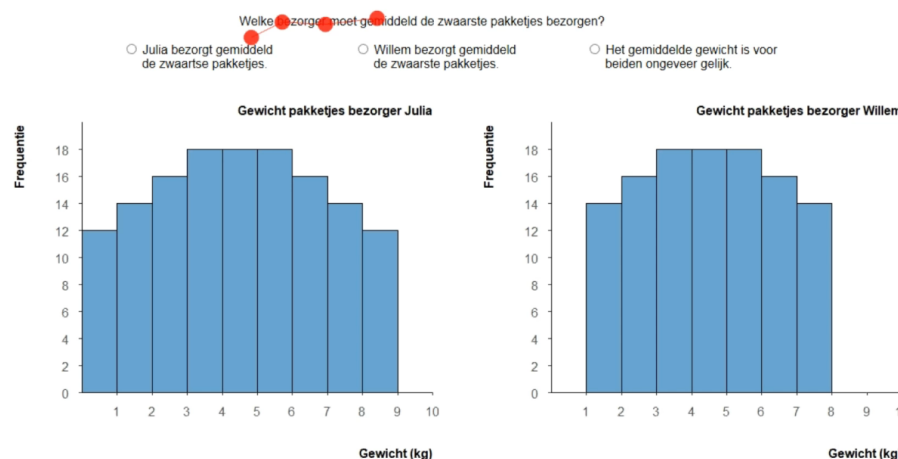
Indicate assumption



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Finns commentaar: “Ik keek naar de balken en vergeleek ze. Ik zag dat Willem minder balken had en dat Julia meer balken had verspreid over het bereik. Omdat we het hebben over het gemiddelde gewicht, dacht ik dat meer balken – zoals in Julia’s histogram – zouden betekenen dat het gemiddelde gewicht hoger was. Ook al ontbraken er balken bij Willem, dacht ik dat dat betekende dat er in die bereiken niets was. Dus koos ik voor Julia, omdat ik meer balken zag en aannam dat dat het gemiddelde gewicht verhoogde.”

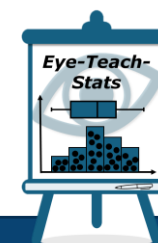
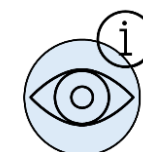
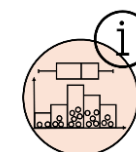


Je kan nu het echte commentaar van Finn lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.

- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



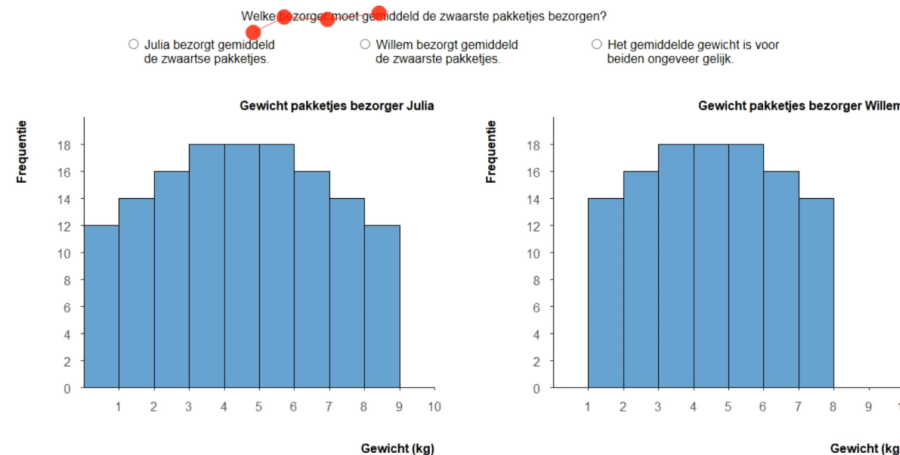
Evaluate solution



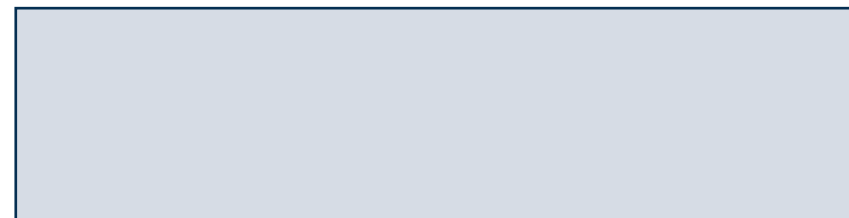
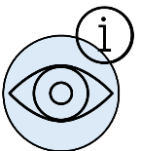
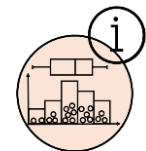
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Finns commentaar: “Ik keek naar de balken en vergeleek ze. Ik zag dat Willem minder balken had en dat Julia meer balken had verspreid over het bereik. Omdat we het hebben over het gemiddelde gewicht, dacht ik dat meer balken – zoals in Julia’s histogram – zouden betekenen dat het gemiddelde gewicht hoger was. Ook al ontbraken er balken bij Willem, dacht ik dat dat betekende dat er in die bereiken niets was. Dus koos ik voor Julia, omdat ik meer balken zag en aannam dat dat het gemiddelde gewicht verhoogde.”



Evalueer Finns oplossing. Wat kan je zeggen van zijn begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

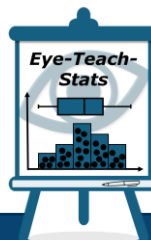
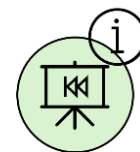
Begrijpen van fouten van leerlingen

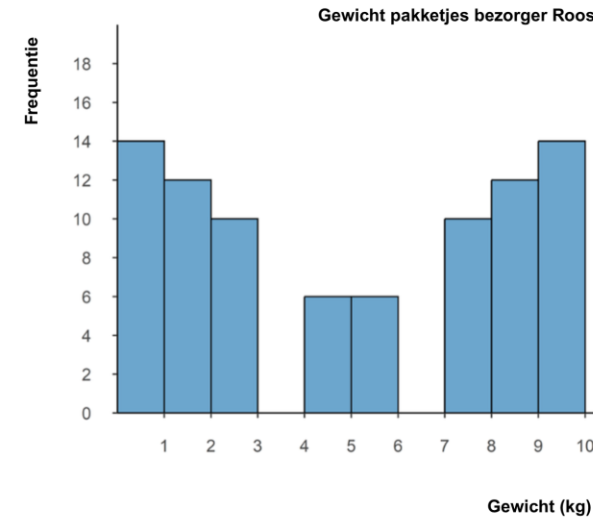
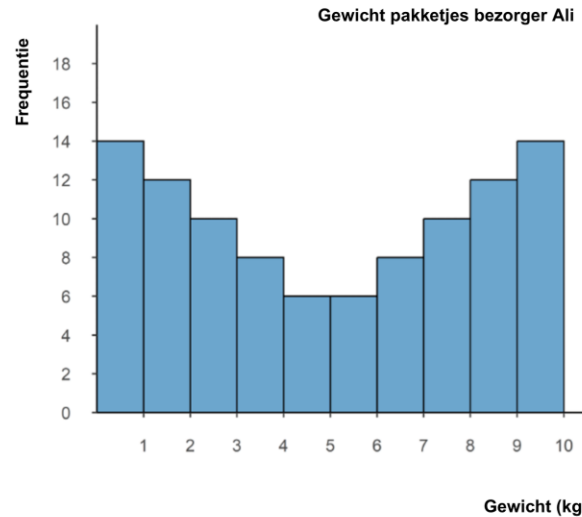
Finn heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid bij het interpreteren van histogrammen. Die leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd het **“te veel nadruk leggen op lokale kenmerken – in dit geval het aantal staven”**.

Observeerbaar gedrag: Finn gaf aan dat hij het aantal staven in de grafieken met elkaar vergeleek en merkte op dat Julia's histogram meer staven had verspreid over het bereik. Hij zei dat meer staven leiden tot een hogere som van de gewichten en dus tot een hoger gemiddelde. Uit de kijkgegevens blijkt dat Finn zijn blik herhaaldelijk verschoof van een staaf in het ene histogram naar de overeenkomstige staaf in het andere. Hij keek niet expliciet naar de 'nul'-staven in het histogram van Willem. Dit wijst op een observeerbare, systematische fout die we aanduiden als te veel nadruk op lokale kenmerken – in dit geval het aantal staven – bij de interpretatie van histogrammen.

Interpretatie door docent/onderzoeker: Op basis van zijn gedrag lijkt Finn zich vooral te richten op het aantal en de spreiding van de staven in elk histogram. Hij negeerde daarbij dat door de symmetrie (de algehele verdeling) het balanspunt van de data (langs de horizontale as) in beide histogrammen gelijk is. Het lijkt erop dat hij de grafiek interpreteerde als een “geval-waardeplot”, waarbij elke staaf één gemeten waarde voorstelt. In histogrammen daarentegen worden de gegevens gegroepeerd in klassen, waarbij de positie van de staaf het meetbereik aangeeft en de hoogte – het aantal metingen (frequentie). Het vergelijken van afzonderlijke staven zonder de verdeling als geheel in acht te nemen – waaronder ook hun positie – leidt tot onjuiste conclusies over de gemiddelden.

Onderliggende conceptuele moeilijkheid: De systematische fout is waarschijnlijk het gevolg van een conceptuele moeilijkheid met het idee van data en verdeling, en dus met het bepalen en vergelijken van gemiddelden in histogrammen. Finn hechtte te veel belang aan het aantal staven en hield onvoldoende rekening met intervallen met een frequentie van nul – die in dit geval geen invloed hadden op het gemiddelde. In histogrammen geldt dat het toevoegen van staven waarbij het balanspunt langs de horizontale as gelijk blijft, het gemiddelde niet verandert.



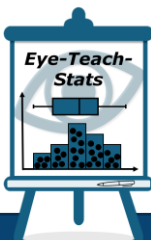
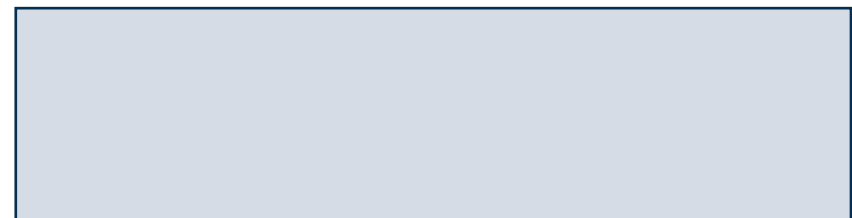


Welke postbezorger bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten?

- a) Ali bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten.
- b) Roos bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten.
- c) Het gemiddelde gewicht is ongeveer gelijk voor beiden.

Stel je voor dat een leerling dezelfde systematische fout maakt: te veel nadruk leggen op lokale kenmerken (het aantal staven).

Beschrijf het mogelijke oogbewegingspatroon dat de leerling zou kunnen vertonen. Verwacht je dat deze fout hier optreedt? Waarom (niet)?



14 Boxplot

Vignette over een fout op basis van een oppervlakte-bias

Introducing situation



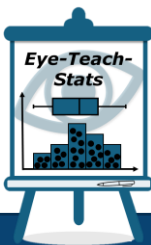
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 2de jaar secundair onderwijs / tweede klas over data-interpretatie. Je leidt leerlingen in in het vergelijken van de verdelingen van data via boxplots.

Je ziet dat een van je leerlingen, Linda, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Zij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Linda aan werkt.



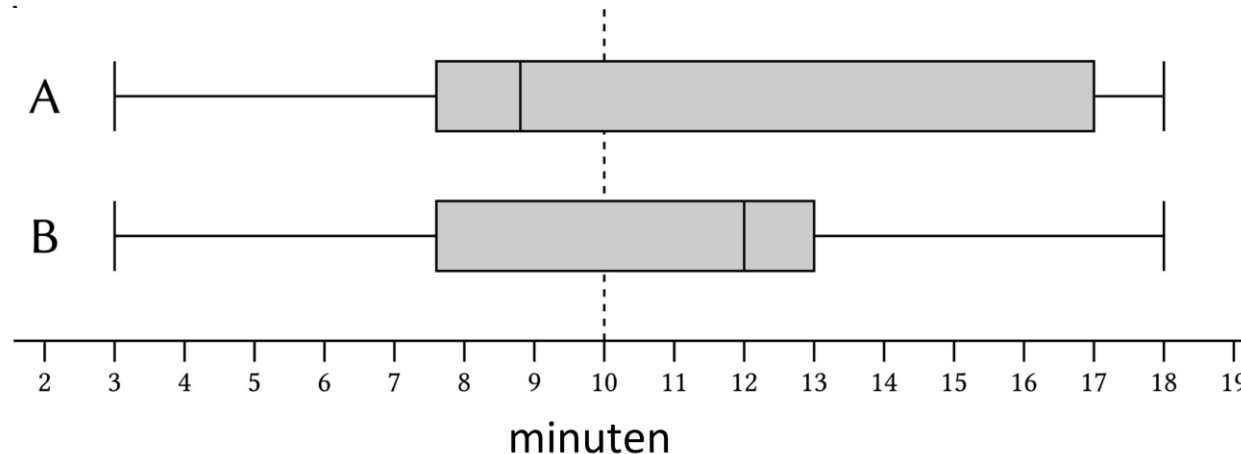
Students task



Co-funded by
the European Union

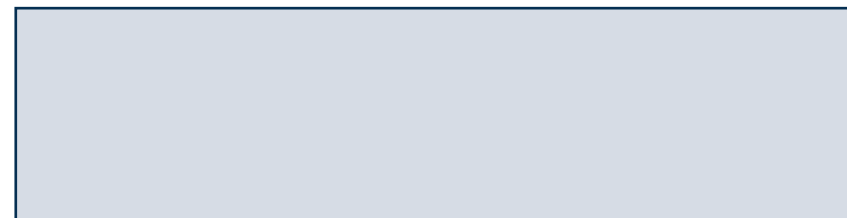
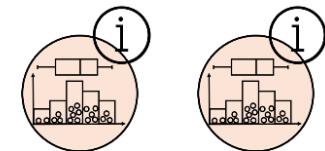
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Twee scholen A en B hebben hetzelfde aantal leerlingen. Alle leerlingen gaven in een enquête aan hoeveel minuten ze 's ochtends wandelen naar school. De resultaten worden weergegeven in twee box plots. In één van de scholen (A of B) zijn er meer leerlingen die 's ochtends langer dan 10 minuten naar school wandelen. Beslis over welke school



Dit is de taak waar Linda aan werkt.

Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.



Introducing eye-tracking

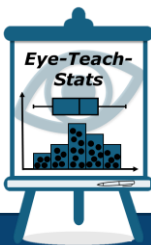


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een hittemap krijgen van je leerling Linda, die gemaakt werd terwijl zij aan de taak werkte. De hittemap geeft aan waar haar visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



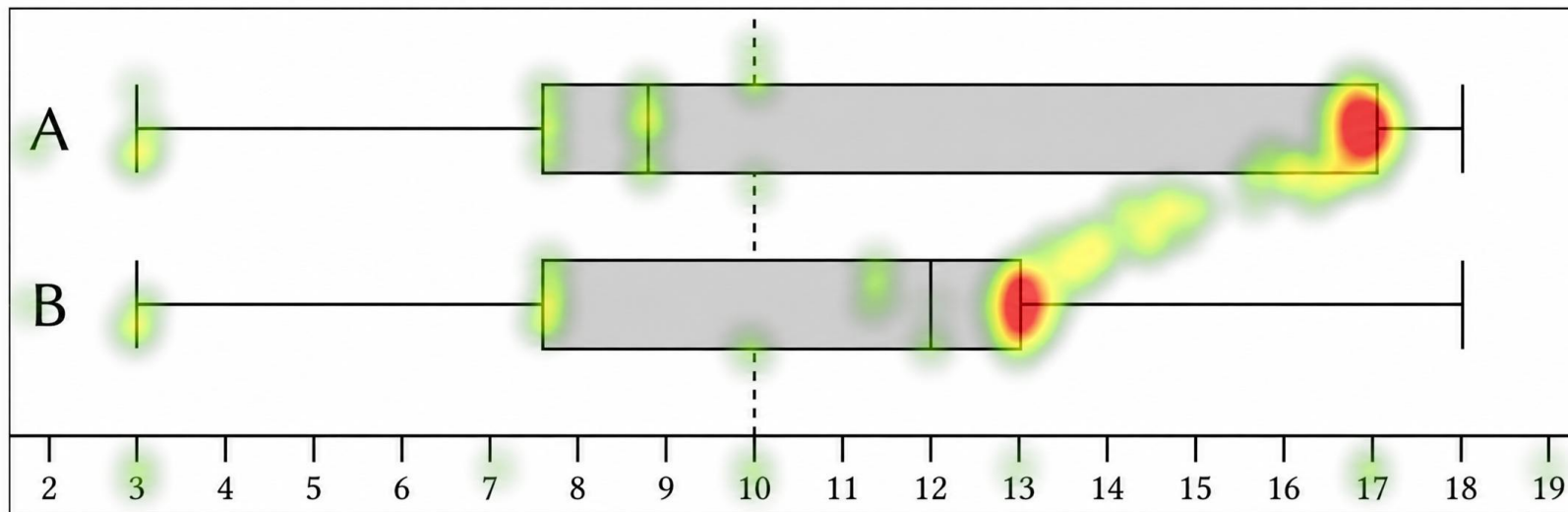
First look



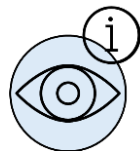
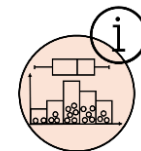
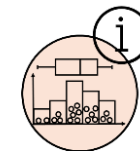
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Linda's antwoord: “Voor mij is School A duidelijk het juiste antwoord. Je kan makkelijk in boxplot A zien dat veel meer leerlingen aangaven dat ze meer dan 10 minuten naar school wandelden.”



Kijk naar de hittemap die de oogbewegingen van je leerling Linda toont en naar haar antwoord.



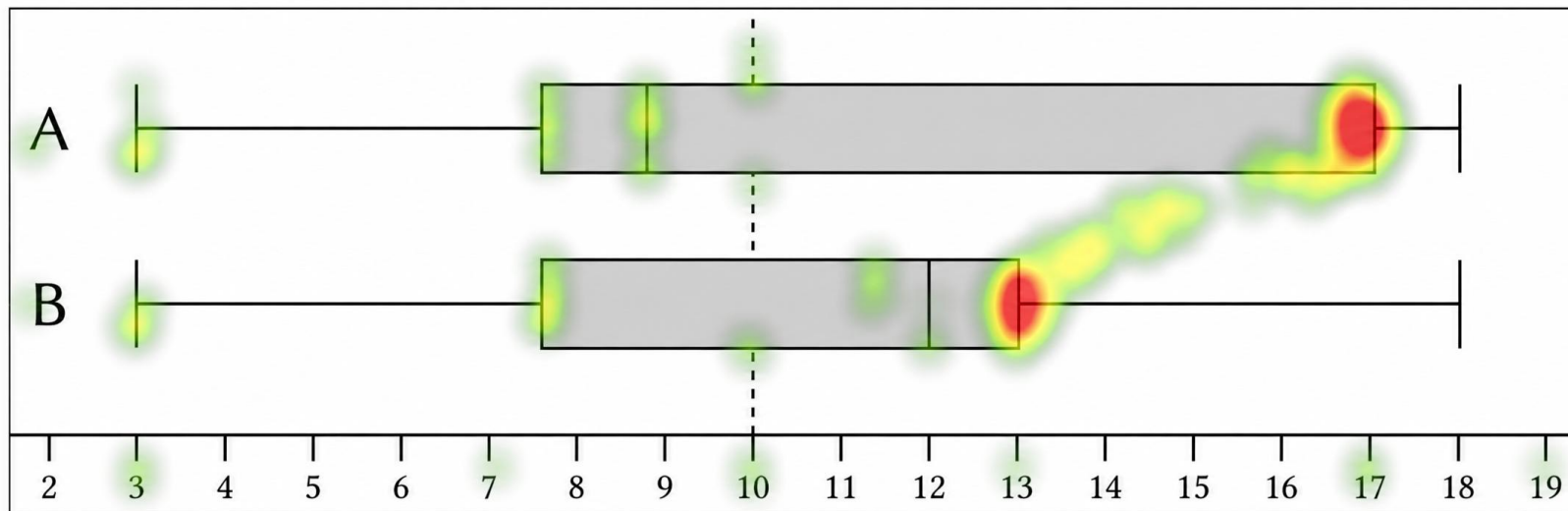
Take perspective



Co-funded by
the European Union

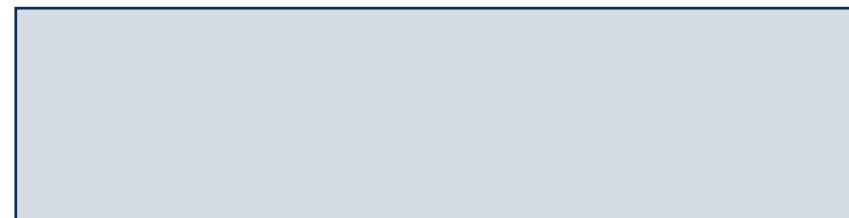
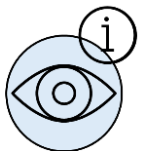
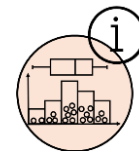
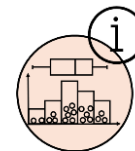
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Linda's antwoord: “Voor mij is School A duidelijk het juiste antwoord. Je kan makkelijk in boxplot A zien dat veel meer leerlingen aangaven dat ze meer dan 10 minuten naar school wandelden.”



Na de taak werd aan Linda haar eigen hitemap getoond. Bij het terugkijken legt zij uit wat zij aan het denken was terwijl zij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Linda te nemen, en formuleer wat zij gezegd kan hebben.



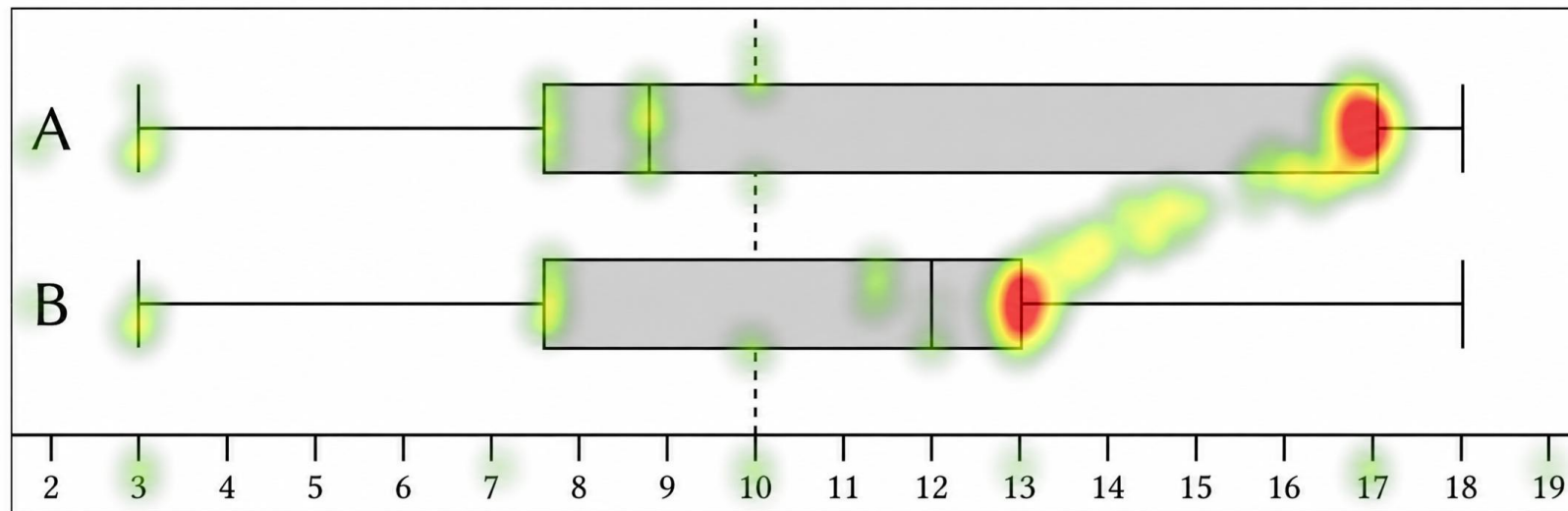
Indicate assumption



Co-funded by
the European Union

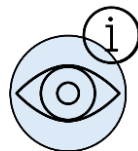
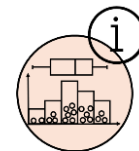
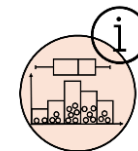
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Linda's commentaar: “De boxplot geeft alle antwoorden weer, om het zo maar even te zeggen. Dus ben ik nagegaan waar er meer van de doos is boven de 10-minutenlimiet. Dat is duidelijk het geval voor boxplot A, dus heb ik ook voor School A gekozen.”



Je kan nu het echte commentaar van Linda lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.



- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



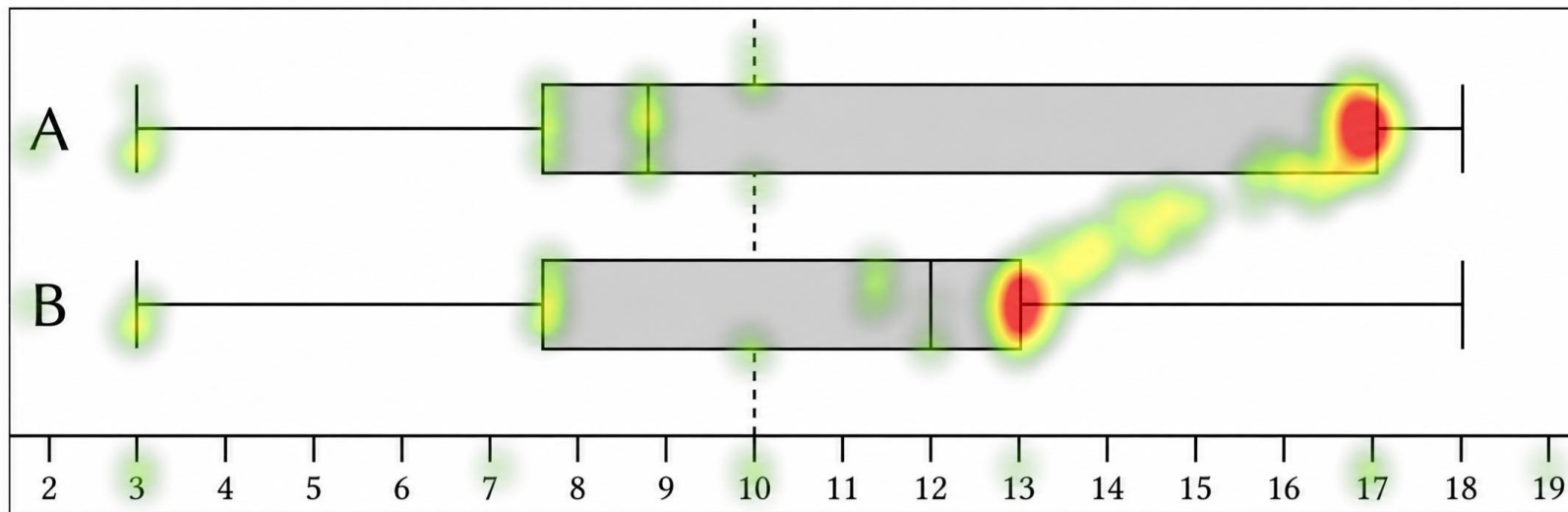
Evaluate solution



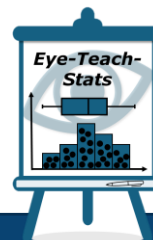
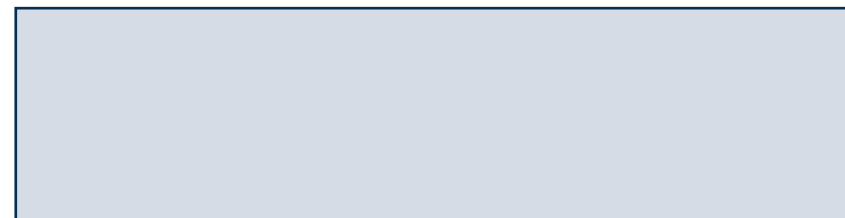
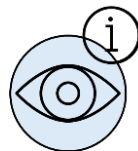
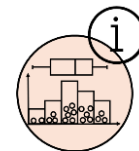
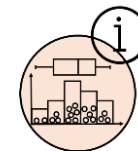
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Linda's commentaar: "De boxplot geeft alle antwoorden weer, om het zo maar even te zeggen. Dus ben ik nagegaan waar er meer van de doos is boven de 10-minutenlimiet. Dat is duidelijk het geval voor boxplot A, dus heb ik ook voor School A gekozen."



Evalueer Linda's oplossing. Wat kan je zeggen van haar begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

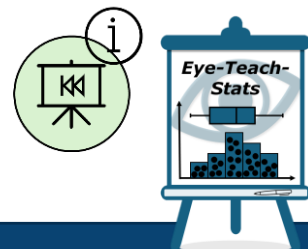
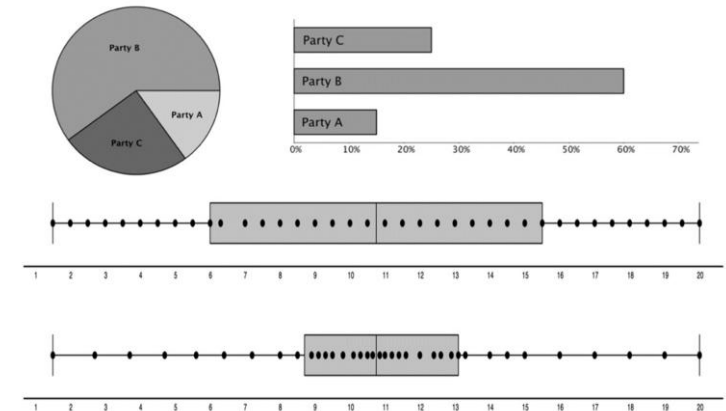
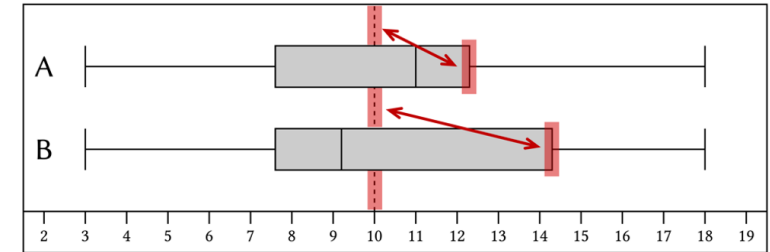
Begrijpen van fouten van leerlingen

Linda heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid met betrekking tot het interpreteren van boxplots. Dit leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd “**oppervlakte-bias**”.

Observeerbaar gedrag: In haar opmerkingen beschrijft Linda dat zij (bij de vraag over bij welke van de twee boxplots er meer datapunten boven een bepaalde waarde liggen) een beslissing neemt op basis van welke boxplot meer oppervlakte boven die kritieke waarde heeft. Haar oogbewegingen tonen een opmerkelijke focus op de derde kwartielen, die de rechtse grens van de boxplot aanduiden.

Interpretatie door de leerkracht / onderzoeker: Een plausibele verklaring voor Linda's benadering en haar oogbewegingen is dat zij onterecht aanneemt dat een grotere oppervlakte van de doos ook overeenkomt met een groter aandeel van de voorgestelde steekproef. Linda's opmerkingen passen bij deze hypothese, maar ook haar oogbewegingen doen dat, gezien haar focus op de derde kwartielen, die de hoeveelheid oppervlakte van de doos boven de kritieke waarde aanduiden.

Onderliggende conceptuele moeilijkheid: Wanneer leerlingen voor de eerste keer boxplots ontmoeten, dan zijn ze meestal al goed vertrouwd met andere soorten statistische representaties zoals cirkeldiagrammen of staafdiagrammen. In deze soorten representaties is de aanname van Linda van een proportioneel verband tussen de oppervlakte en het aandeel van de voorgestelde steekproef correct. Maar dat is niet het geval voor boxplots, omdat de doos altijd de middelste helft van de data weergeeft, en de oppervlakte of de breedte van de doos zijn dus een maat voor de variabiliteit van de dataset, en geeft dus aan hoeveel de middelste helft van de data gespreid is (interkwartielbereik). Als leerlingen onterecht hun voorkennis over statistische representaties transfereren bij het interpreteren van boxplots, dan ontstaat de systematische fout die je net hebt geobserveerd bij je leerling Linda.



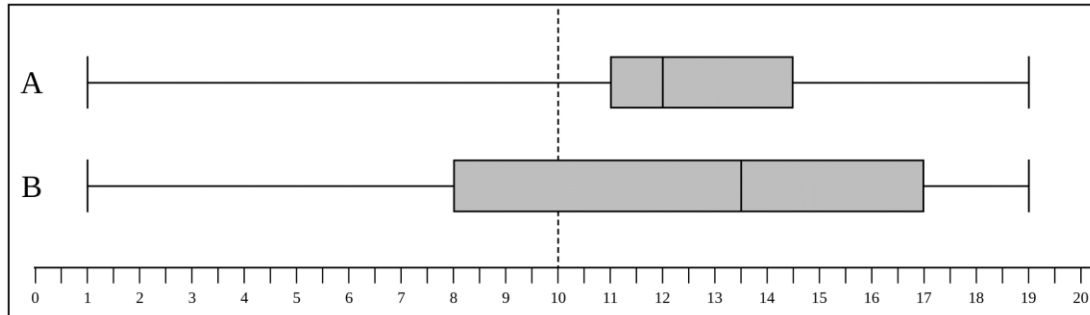
Practice



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Bepaal in welke boxplot een groter deel van de steekproef boven 10 ligt.



Drie leerlingen beschreven een verschillende redenering bij het oplossen van de taak:

Kira: "De kwartielen verdelen de data in vier delen met ongeveer evenveel waarden. Aan de positie van de kwartielen kun je dus zien in welke gebieden de verschillende kwarten van de steekproef liggen."

Lionel: "Het bereik toont hoe gespreid alle datapunten zijn, maar de doos bevat enkel de middelste helft van de data. Door te kijken waar de doos ligt, kun je zien waar de meeste datapunten liggen."

Tom: "De doos stelt de centrale datapunten voor, en we kunnen de doos gebruiken om uitspraken te doen over de verdeling van de steekproef, omdat de grootte van de doos verandert afhankelijk van hoe de datapunten verdeeld zijn."

Welk van deze argumenten leidt het meest waarschijnlijk tot een fout antwoord?

☐ Kira

☐ Lionel

☐ Tom



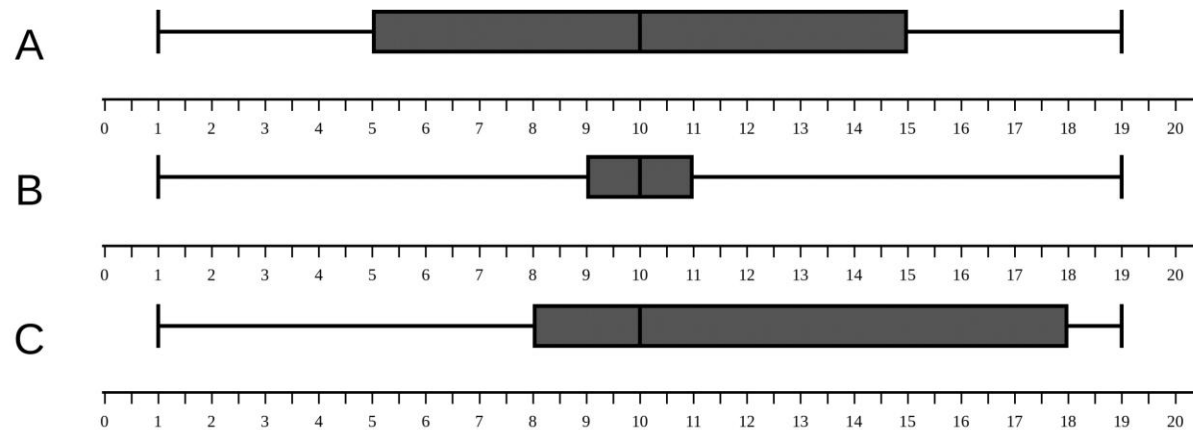
Practice II



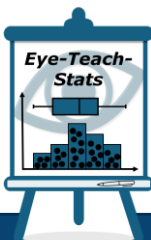
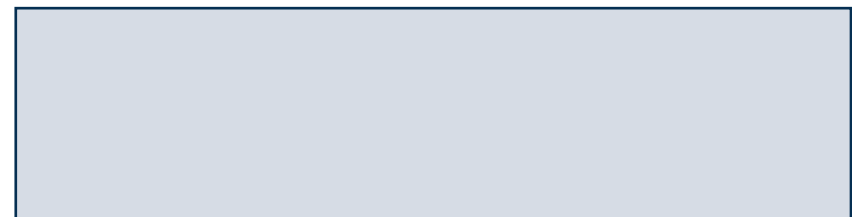
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Amy heeft conceptuele moeilijkheden met de betekenis van de doos in een boxplot: ze lijkt de grootte van de doos te koppelen aan de frequentie van datapunten. Voor elk van de volgende drie uitspraken besliste ze of die waar of onwaar is. Voorspel Amy's antwoord op elke uitspraak en verantwoord je voorspelling kort.



- Uitspraak 1: In alle drie de boxplots is het aandeel datapunten boven en onder 10 hetzelfde.
- Uitspraak 2: In boxplot A liggen de datapunten geclusterd rond het midden, terwijl er naar de uiteinden toe minder datapunten liggen.
- Uitspraak 3: Boxplot A stelt meer datapunten voor dan boxplot B.



Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the National Agency. Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

15 Boxplot

Vignette over een fout op basis van een oppervlakte-bias

Introducing situation



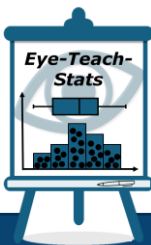
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 2de jaar secundair onderwijs / tweede klas over data-interpretatie. Je leidt leerlingen in in het vergelijken van de verdelingen van data via boxplots.

Je ziet dat een van je leerlingen, Paul, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Hij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Paul aan werkt.



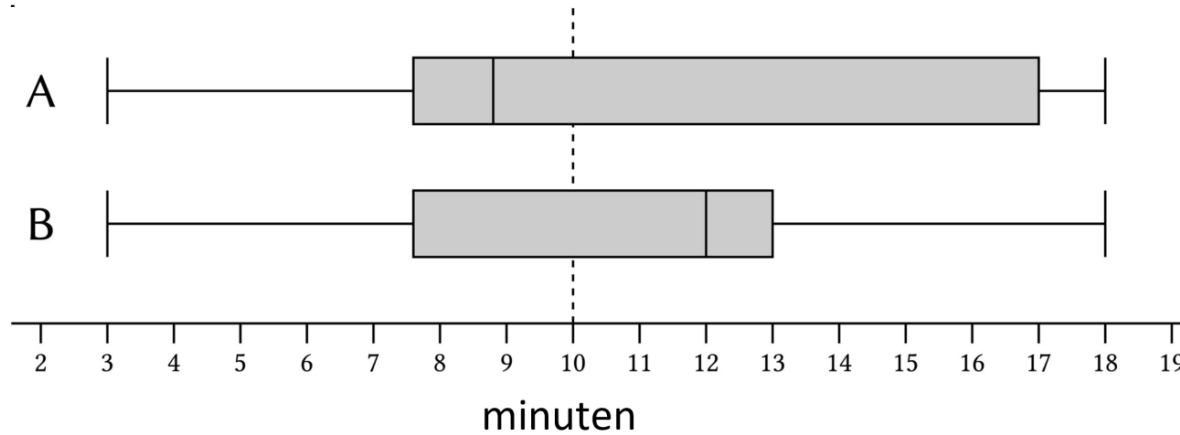
Students task



Co-funded by
the European Union

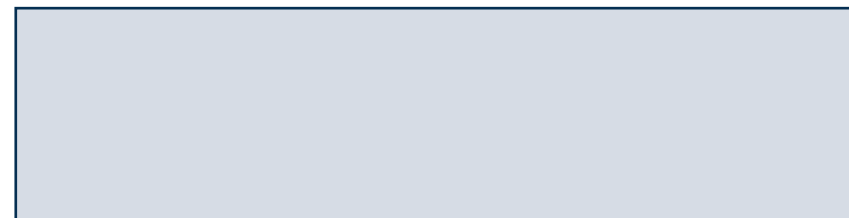
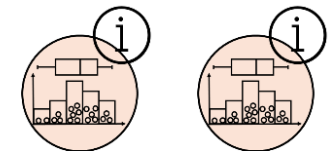
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Twee scholen A en B hebben hetzelfde aantal leerlingen. Alle leerlingen gaven in een enquête aan hoeveel minuten ze 's ochtends wandelen naar school. De resultaten worden weergegeven in twee box plots. In één van de scholen (A of B) zijn er meer leerlingen die 's ochtends langer dan 10 minuten naar school wandelen. Beslis over welke school



Dit is de taak waar Paul aan werkt.

Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.



Introducing eye-tracking

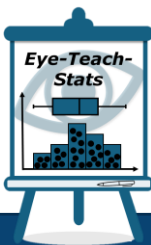


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een oogbewegingsgrafiek krijgen van je leerling Paul, die gemaakt werd terwijl hij aan de taak werkte. De oogbewegingsgrafiek geeft aan waar zijn visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



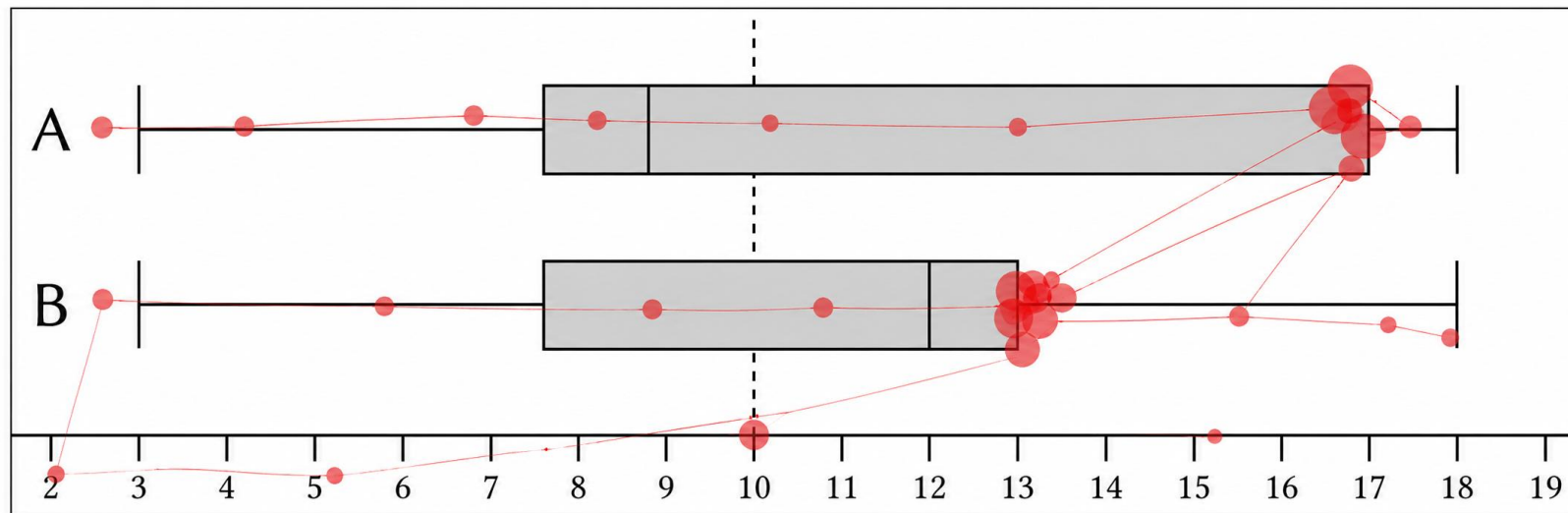
First look



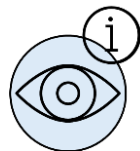
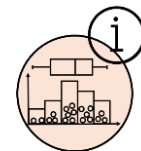
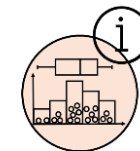
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Pauls antwoord: “Voor mij is School A duidelijk het juiste antwoord. Je kan makkelijk in boxplot A zien dat veel meer leerlingen aangaven dat ze meer dan 10 minuten naar school wandelden.”



Kijk naar de oogbewegingsgrafiek die de oogbewegingen van je leerling Paul toont en naar zijn antwoord.



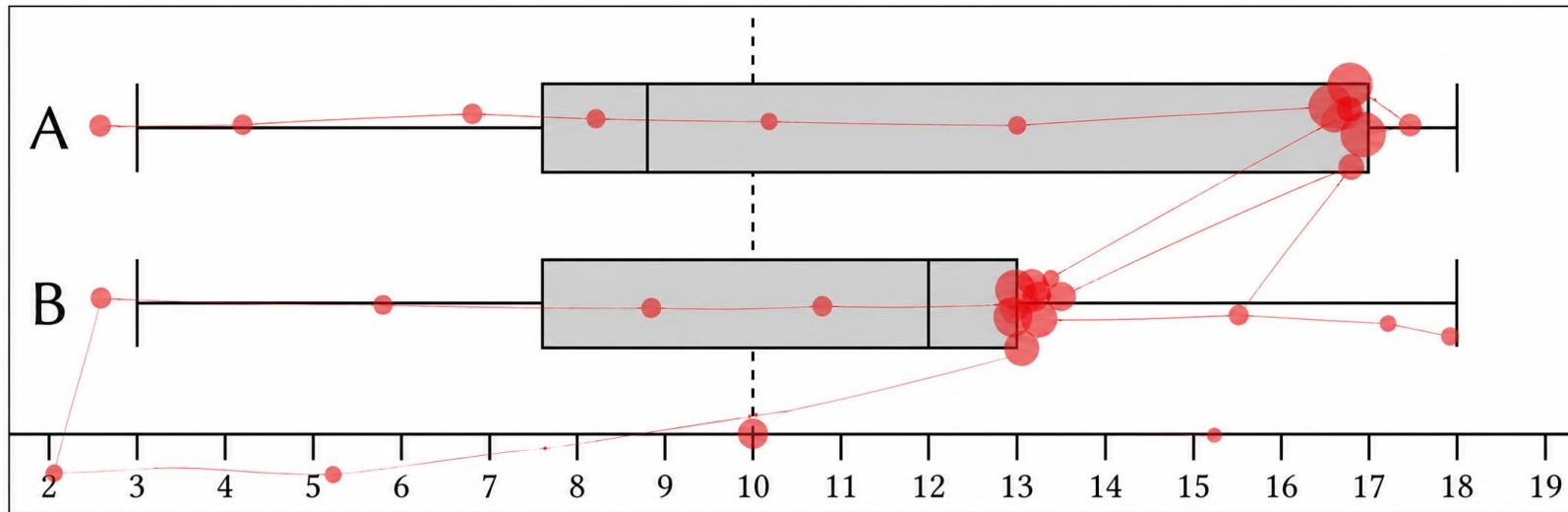
Take perspective



Co-funded by
the European Union

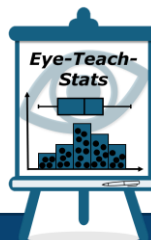
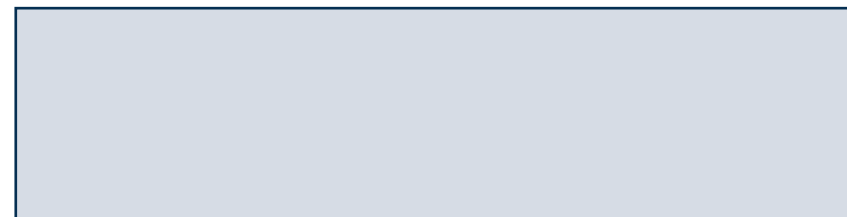
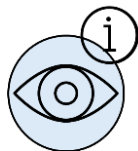
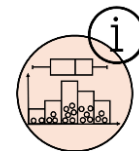
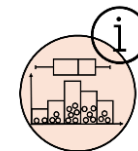
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Pauls antwoord: “Voor mij is School A duidelijk het juiste antwoord. Je kan makkelijk in boxplot A zien dat veel meer leerlingen aangaven dat ze meer dan 10 minuten naar school wandelden.”



Na de taak werd aan Paul zijn eigen oogbewegingsgrafiek getoond. Bij het terugkijken legt hij uit wat hij aan het denken was terwijl hij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Paul te nemen, en formuleer wat hij gezegd kan hebben.



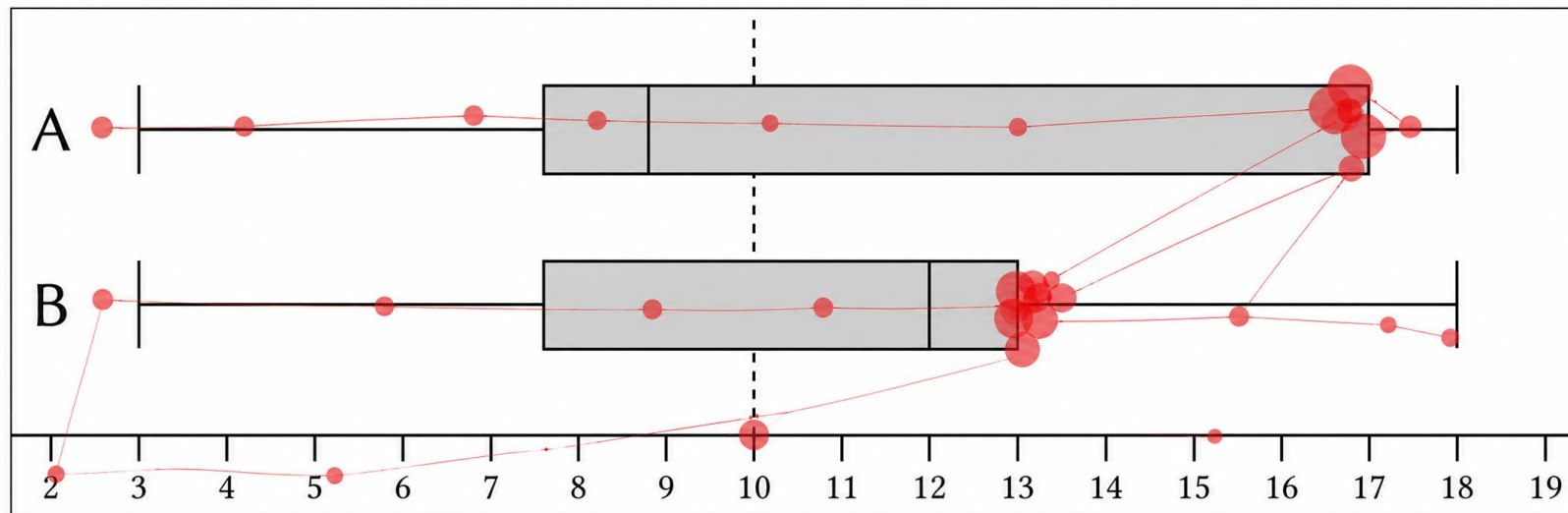
Indicate assumption



Co-funded by
the European Union

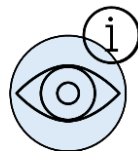
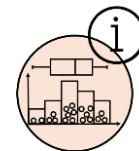
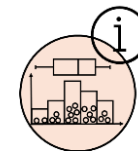
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Pauls commentaar: “De boxplot geeft alle antwoorden weer, om het zo maar even te zeggen. Dus ben ik nagegaan waar er meer van de doos is boven de 10-minutenlimiet. Dat is duidelijk het geval voor boxplot A, dus heb ik ook voor School A gekozen.”



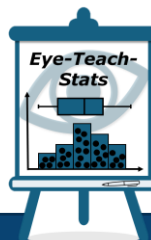
Je kan nu het echte commentaar van Paul lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.



- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



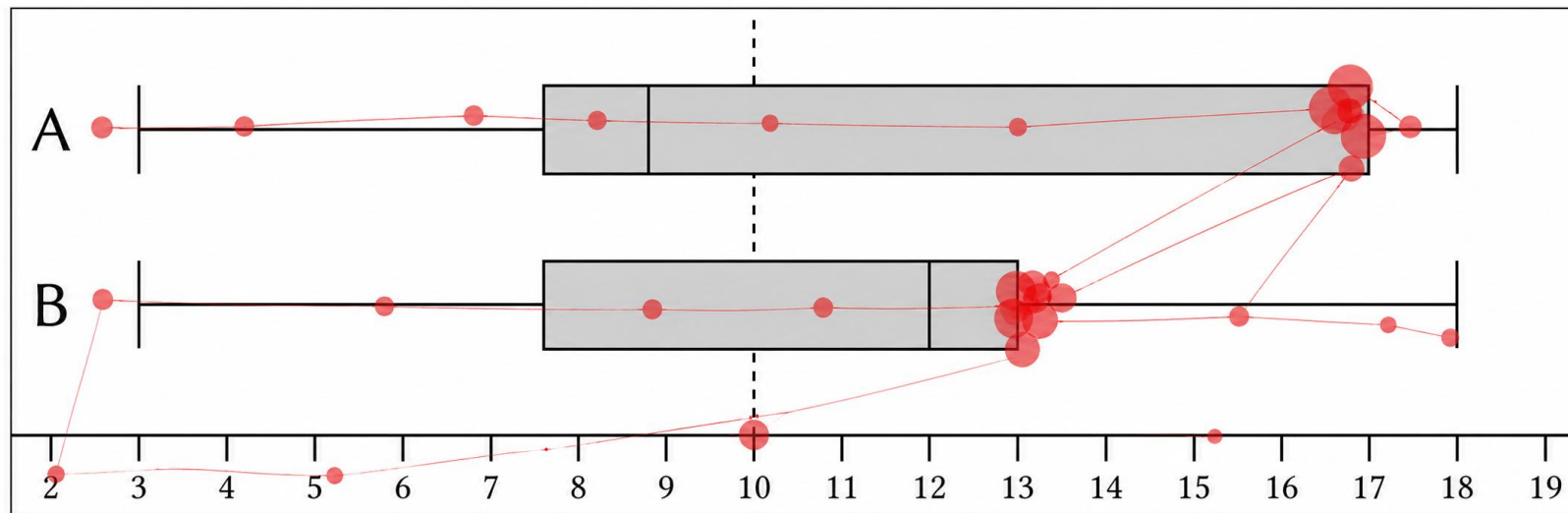
Evaluate solution



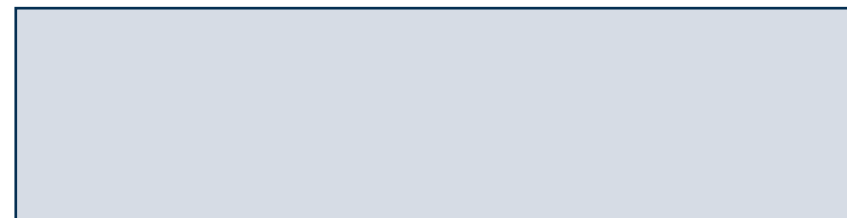
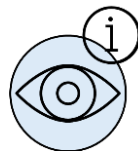
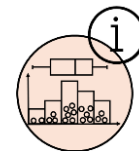
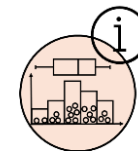
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Pauls commentaar: “De boxplot geeft alle antwoorden weer, om het zo maar even te zeggen. Dus ben ik nagegaan waar er meer van de doos is boven de 10-minutenlimiet. Dat is duidelijk het geval voor boxplot A, dus heb ik ook voor School A gekozen.”



Evalueer Pauls oplossing. Wat kan je zeggen van zijn begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

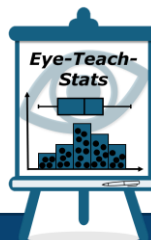
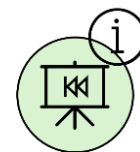
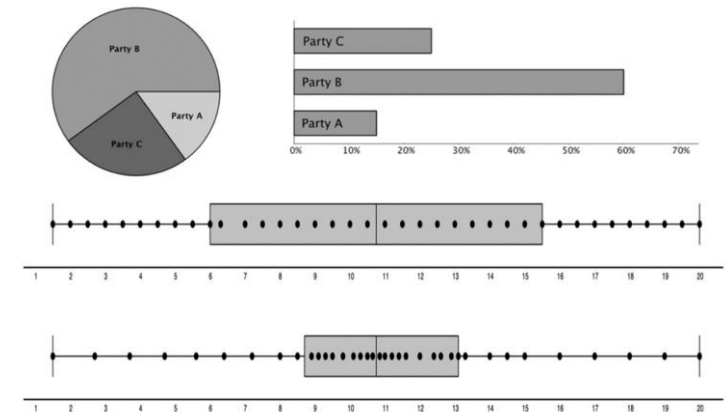
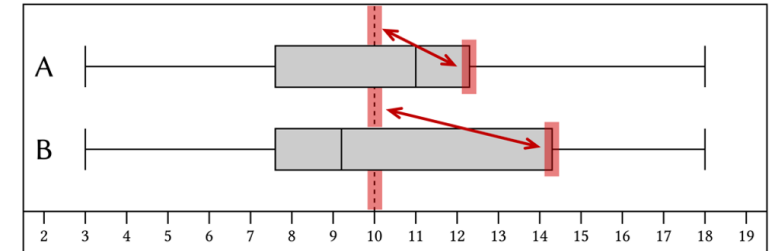
Begrijpen van fouten van leerlingen

Paul heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid met betrekking tot het interpreteren van boxplots. Dit leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd “**oppervlakte-bias**”.

Observeerbaar gedrag: In zijn opmerkingen beschrijft Paul dat hij (bij de vraag over bij welke van de twee boxplots er meer datapunten boven een bepaalde waarde liggen) een beslissing neemt op basis van welke boxplot meer oppervlakte boven die kritieke waarde heeft. Zijn oogbewegingen tonen een opmerkelijke focus op de derde kwartielen, die de rechtse grens van de boxplot aanduiden.

Interpretatie door de leerkracht / onderzoeker: Een plausibele verklaring voor Pauls benadering en zijn oogbewegingen is dat hij onterecht aanneemt dat een grotere oppervlakte van de doos ook overeenkomt met een groter aandeel van de voorgestelde steekproef. Pauls opmerkingen passen bij deze hypothese, maar ook zijn oogbewegingen doen dat, gezien zijn focus op de derde kwartielen, die de hoeveelheid oppervlakte van de doos boven de kritieke waarde aanduiden.

Onderliggende conceptuele moeilijkheid: Wanneer leerlingen voor de eerste keer boxplots ontmoeten, dan zijn ze meestal al goed vertrouwd met andere soorten statistische representaties zoals cirkeldiagrammen of staafdiagrammen. In deze soorten representaties is de aanname van Paul van een proportioneel verband tussen de oppervlakte en het aandeel van de voorgestelde steekproef correct. Maar dat is niet het geval voor boxplots, omdat de doos altijd de middelste helft van de data weergeeft, en de oppervlakte of de breedte van de doos zijn dus een maat voor de variabiliteit van de dataset, en geeft dus aan hoeveel de middelste helft van de data gespreid is (interkwartielbereik). Als leerlingen onterecht hun voorkennis over statistische representaties transfereren bij het interpreteren van boxplots, dan ontstaat de systematische fout die je net hebt geobserveerd bij je leerling Paul.



Practice

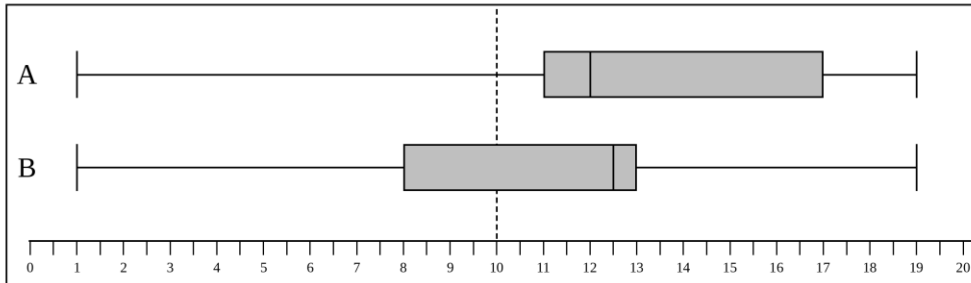


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

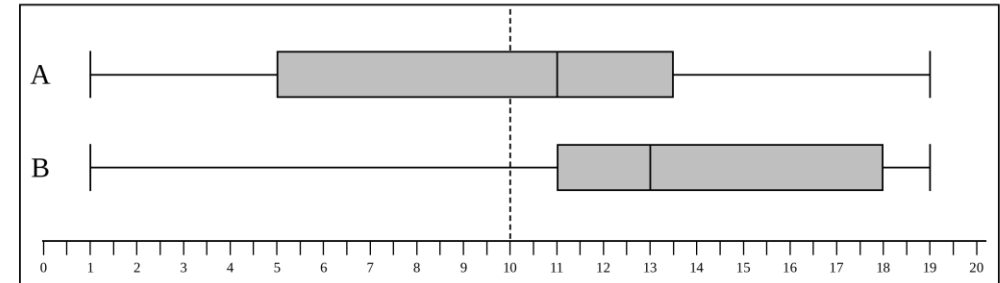
Stel dat je vermoedt dat een van je leerlingen conceptuele moeilijkheden heeft bij het interpreteren van de oppervlakte van de doos. Welke van de volgende opgaven zou je je leerling laten oplossen om deze mogelijke conceptuele moeilijkheid te diagnosticeren?

A



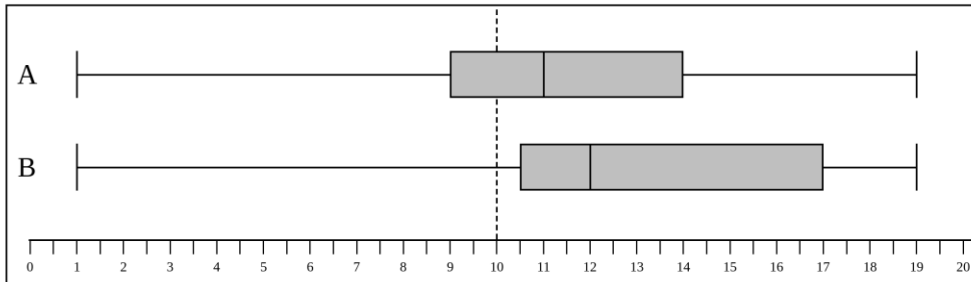
Bepaal in welke boxplot een groter deel van de steekproef boven 10 ligt.

B



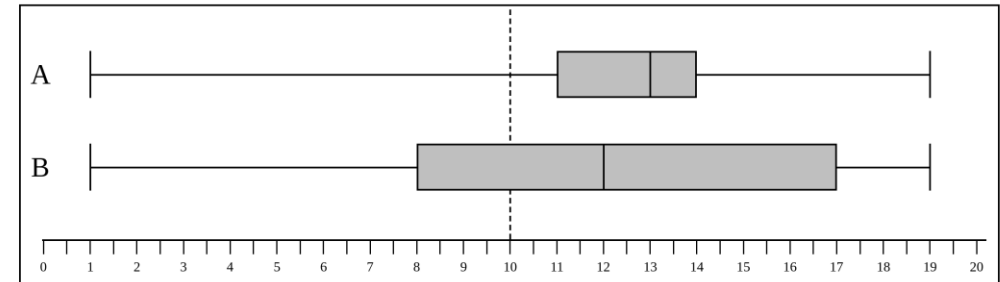
Bepaal in welke boxplot een groter deel van de steekproef boven 10 ligt.

C



Bepaal in welke boxplot een groter deel van de steekproef boven 10 ligt.

D



Bepaal in welke boxplot een groter deel van de steekproef boven 10 ligt.

☐ A

☐ B

☐ C

☐ D



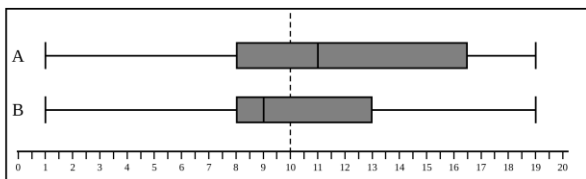
Practice II



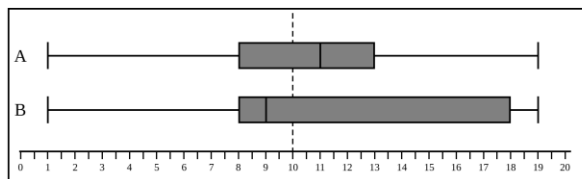
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

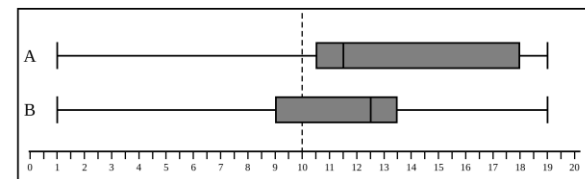
Je leerling Tom heeft de volgende zes opgaven opgelost, soms juist en soms fout.



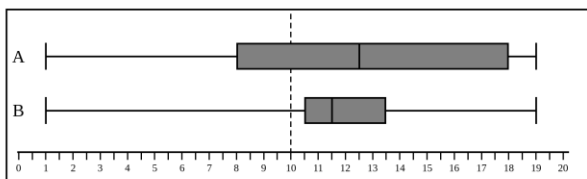
✓ Tom antwoordde
juist (A)



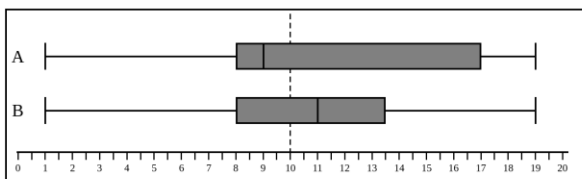
✗ Tom antwoordde
fout (B)



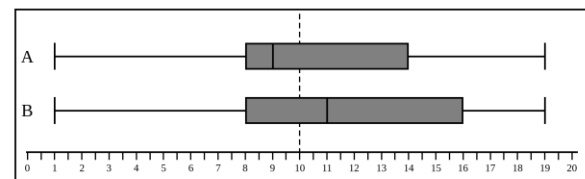
✓ Tom antwoordde
juist (A)



✓ Tom antwoordde
juist (B)

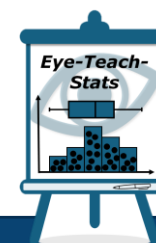
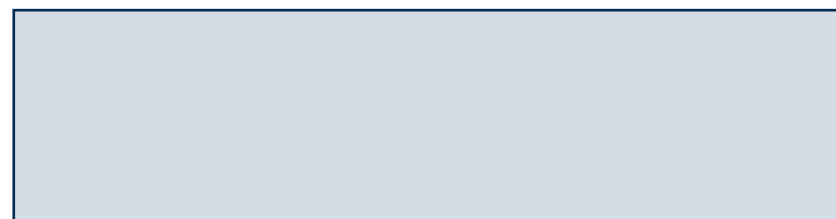


✗ Tom antwoordde
fout (A)



✓ Tom antwoordde
juist (B)

Wat zeggen Toms antwoorden over zijn begrip van de betekenis van de doos (oppervlakte) in boxplots, inclusief mogelijke conceptuele moeilijkheden die nog kunnen bestaan?





Eye-Teach-Stats Eye-Tracking Vignettes © 2026



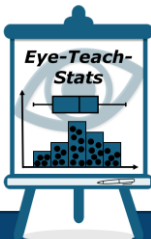
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the National Agency. Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

16 Boxplot

Vignette over een fout op basis van een mediaan-bias



Introducing situation



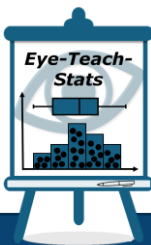
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 2de jaar secundair onderwijs / tweede klas over data-interpretatie. Je leidt leerlingen in in het vergelijken van de verdelingen van data via boxplots.

Je ziet dat een van je leerlingen, Katharina, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Zij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Katharina aan werkt.



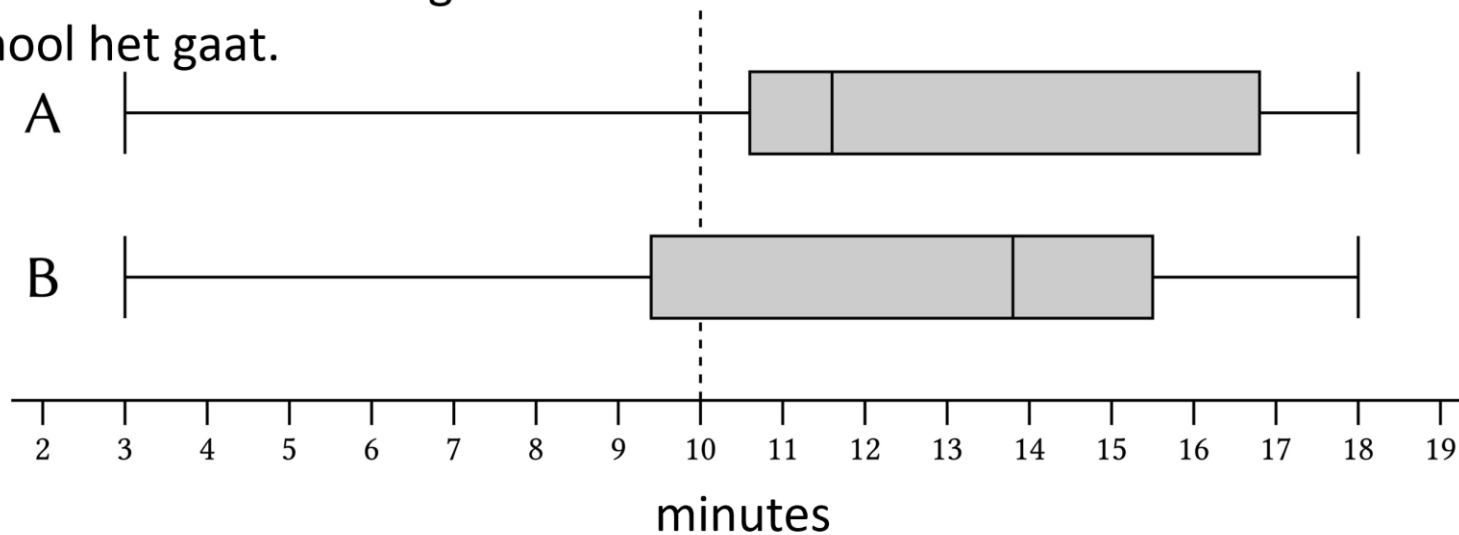
Students task



Co-funded by
the European Union

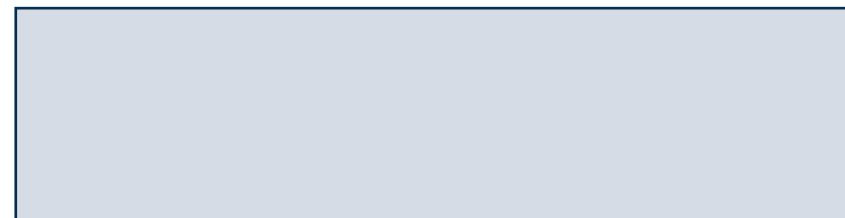
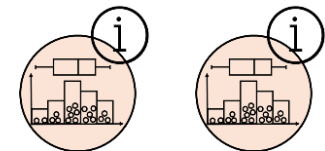
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Twee scholen A en B hebben hetzelfde aantal leerlingen. Alle leerlingen gaven in een enquête aan hoeveel minuten ze 's ochtends wandelen naar school. De resultaten worden weergegeven in twee box plots. In één van de scholen (A of B) zijn er meer leerlingen die 's ochtends langer dan 10 minuten naar school wandelen. Beslis over welke school het gaat.



Dit is de taak waar Katharina aan werkt.

Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.



Introducing eye-tracking

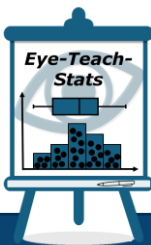


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een oogbewegingsvideo krijgen van je leerling Katharina, die gemaakt werd terwijl zij aan de taak werkte. De oogbewegingsvideo geeft aan waar haar visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



First look

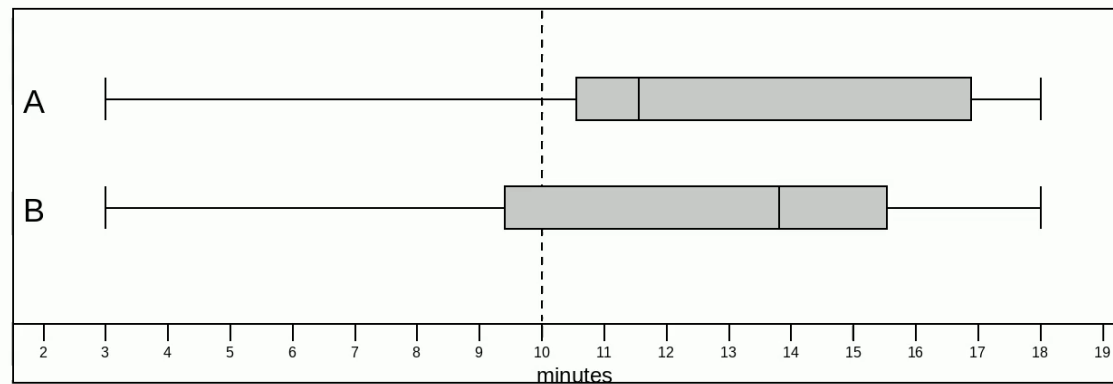


Co-funded by
the European Union

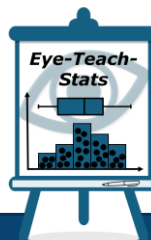
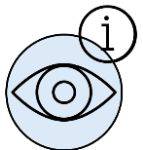
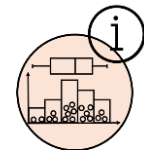
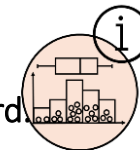
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Katharina's antwoord: “Voor mij is School B duidelijk het juiste antwoord. Je kan makkelijk in boxplot B zien dat veel meer leerlingen aangaven dat ze meer dan 10 minuten naar school wandelden.”

One school has a larger number of children with a walk to school longer than 10 minutes.
Decide which one.



Kijk naar de oogbewegingsvideo die de oogbewegingen van je leerling Katharina toont en naar haar antwoord.



Take perspective

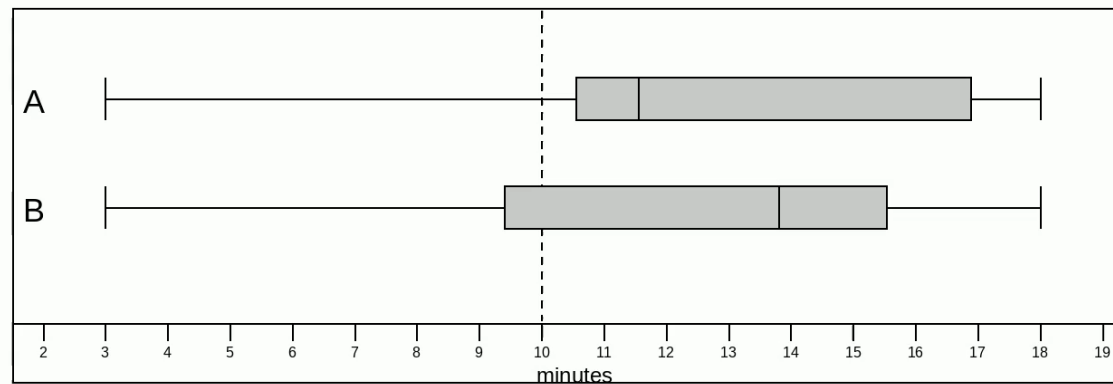


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

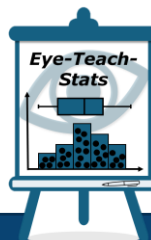
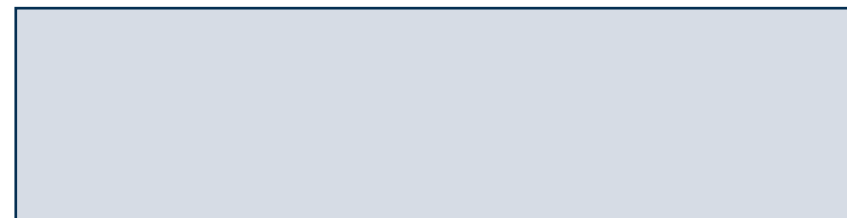
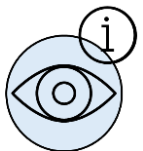
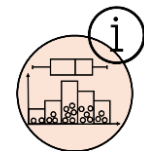
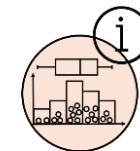
Katharina's antwoord: “Voor mij is School B duidelijk het juiste antwoord. Je kan makkelijk in boxplot B zien dat veel meer leerlingen aangaven dat ze meer dan 10 minuten naar school wandelden.”

One school has a larger number of children with a walk to school longer than 10 minutes.
Decide which one.



Na de taak werd aan Katharina haar eigen oogbewegingsvideo getoond. Bij het terugkijken legt zij uit wat zij aan het denken was terwijl zij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Katharina te nemen, en formuleer wat zij gezegd kan hebben.



Indicate assumption

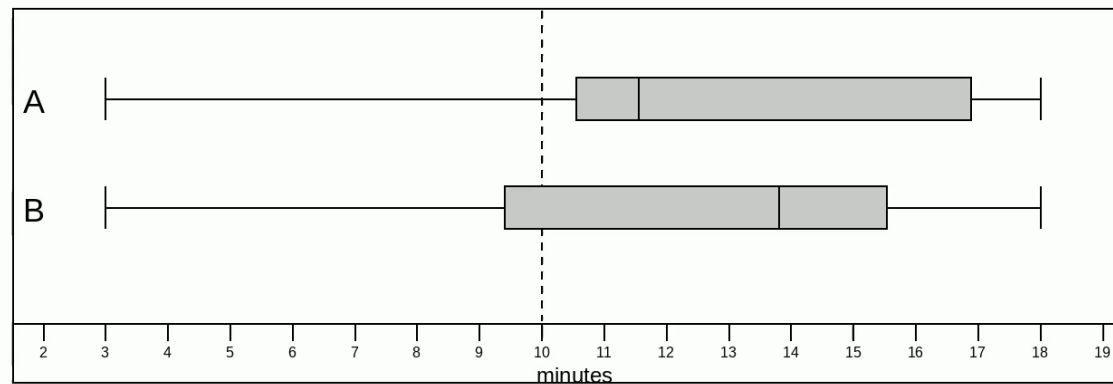


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Katharina's commentaar: "De lijn in het midden van de doos is de mediaan, die een gemiddelde waarde is. Dus ik heb vooral de twee medianen vergeleken. Je kan duidelijk zien dat de leerlingen van school B er gemiddeld veel langer over doen om naar school te wandelen dan die van school A. Dus koos ik school B."

One school has a larger number of children with a walk to school longer than 10 minutes.
Decide which one.

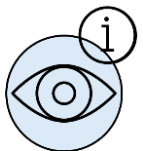
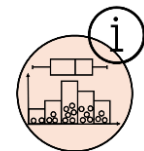
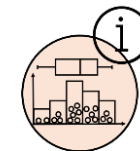


Je kan nu het echte commentaar van Katharina lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.

- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



Evaluate solution

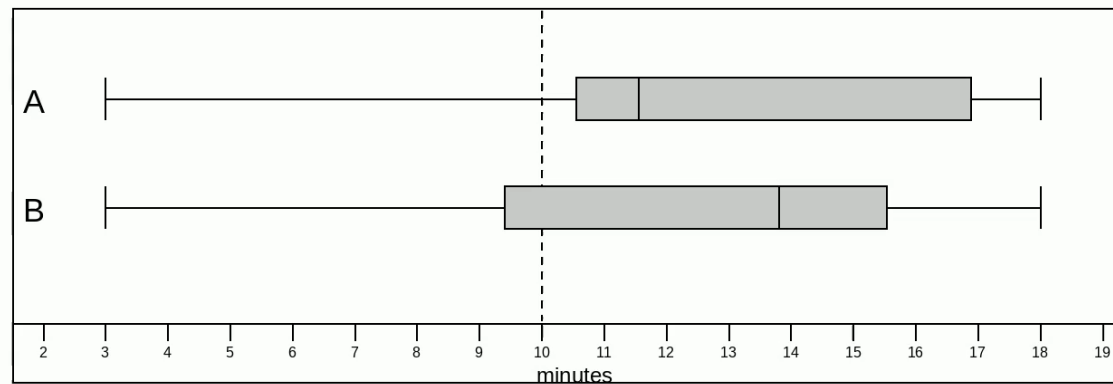


Co-funded by
the European Union

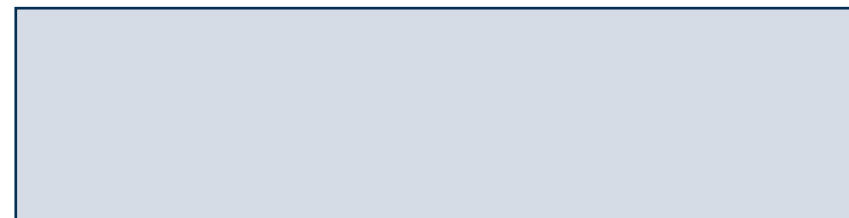
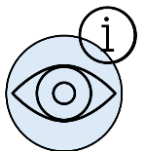
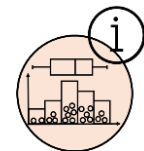
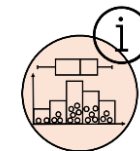
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Katharina's commentaar: "De lijn in het midden van de doos is de mediaan, die een gemiddelde waarde is. Dus ik heb vooral de twee medianen vergeleken. Je kan duidelijk zien dat de leerlingen van school B er gemiddeld veel langer over doen om naar school te wandelen dan die van school A. Dus koos ik school B."

One school has a larger number of children with a walk to school longer than 10 minutes.
Decide which one.



Evalueer Katharina's oplossing. Wat kan je zeggen van haar begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

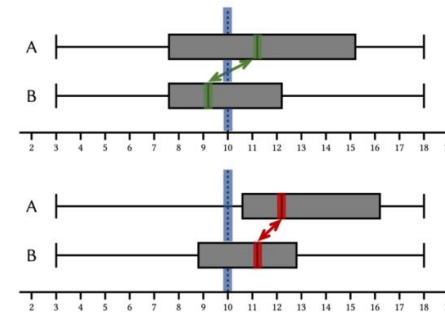
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Begrijpen van fouten van leerlingen

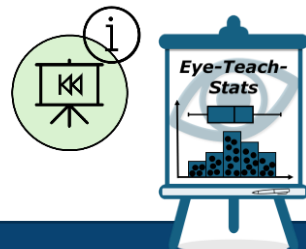
Katharina heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid met betrekking tot het interpreteren van boxplots. Die leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd “mediaan-bias”.

Observeerbaar gedrag: In haar opmerkingen beschrijft Katharina dat zij (bij de vraag over welke van de twee boxplots meer datapunten boven een bepaalde waarde liggen) een beslissing neemt op basis van welke boxplot een hogere mediaan heeft. Haar oogbewegingen tonen ook een opmerkelijke focus op de twee medianen.

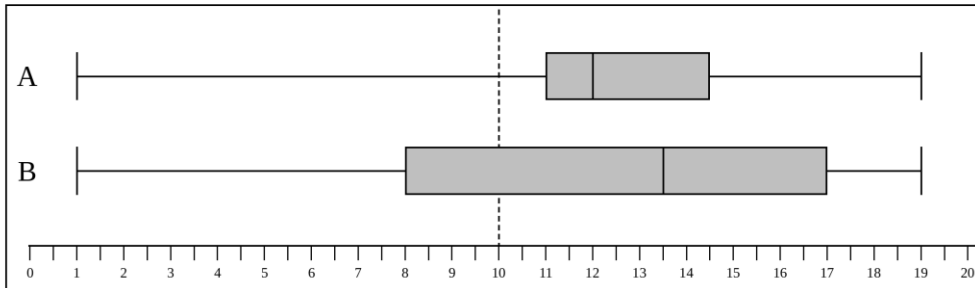
Interpretatie door de leerkracht / onderzoeker: Een plausibele verklaring voor de benadering van Katharina en voor haar oogbewegingen is dat ze de mediaan niet interpreteert als de specifieke grenswaarde die aangeeft waar de grens is tussen de bovenste en onderste helft van de data, maar ze gebruikt de mediaan om te beslissen welke van de twee verdelingen eerder hoge waarden heeft, en ze gebruikt deze maat voor de centrale tendens om haar beslissing te nemen. Haar oogbewegingen – die aangeven dat ze de twee medianen direct met elkaar vergelijkt en niet hun positie ten opzichte van de kritieke waarde – passen bij deze aanname.



Onderliggende conceptuele moeilijkheid: Wanneer leerlingen voor het eerst boxplots ontmoeten, dan zijn ze gewoonlijk al vertrouwd met verschillende maten voor centrale tendens zoals de mediaan. Maten voor de centrale tendens zijn niet alleen vertrouwd vanuit schoolcontexten; ze komen ook voor in verschillende contexten buiten school. Als leerlingen de (goed gekende) mediaan zien in de boxplot representatie, dan is het plausibel om aan te nemen dat ze die vertrouwde parameter gebruiken om een beslissing te nemen, vooral wanneer ze nog geen specifieke kennis over de boxplot hebben verworven die nodig is om tot de juiste oplossing te komen. Deze overgeneralisatie van de mediaan leidt dan tot de systematische fout die je net hebt vastgesteld bij je leerling Katharina.



Bepaal in welke boxplot een groter deel van de steekproef boven 10 ligt.



Drie leerlingen beschreven een verschillende redenering bij het oplossen van de taak:

Tom: "De kwartielen verdelen de datapunten in ongeveer vier gelijke delen. Aan de positie van de kwartielen kun je dus zien welk percentage van de datapunten in welk gebied van de dataset ligt."

Lionel: "De mediaan toont de typische waarde van een steekproef. Zo kun je inschatten hoe hoog de waarden in een steekproef zijn, en kun je de medianen vergelijken om in te schatten waar de waarden eerder verder naar rechts liggen."

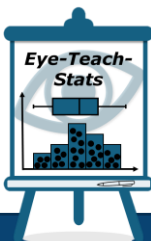
Kira: "Terwijl het bereik de hele steekproef omvat, staat de doos voor de middelste helft van de data. Aan de positie van de doos kun je zien hoe ver naar rechts of links de middelste helft van de data ligt."

Welk van deze argumenten leidt het meest waarschijnlijk tot een fout antwoord?

☐ Tom

☐ Lionel

☐ Kira



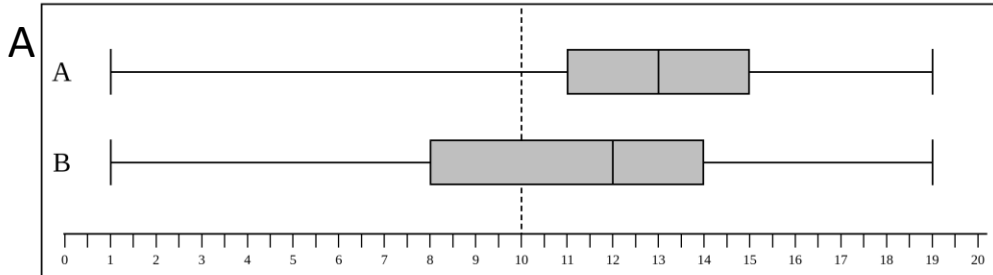
Practice II



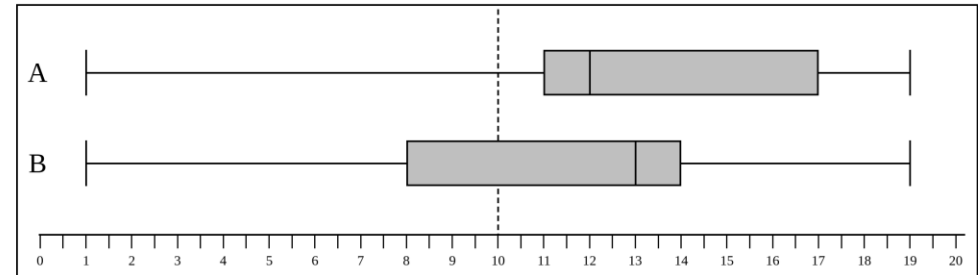
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

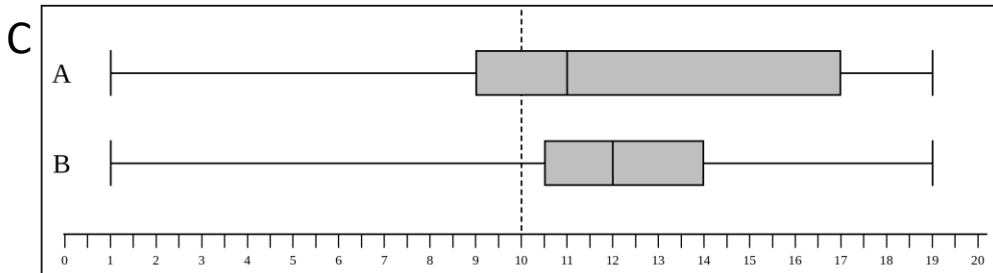
Stel dat je vermoedt dat een van je leerlingen conceptuele moeilijkheden heeft bij het interpreteren van de mediaan. Welke van de volgende opgaven zou je je leerling laten oplossen om deze mogelijke conceptuele moeilijkheid te diagnosticeren?



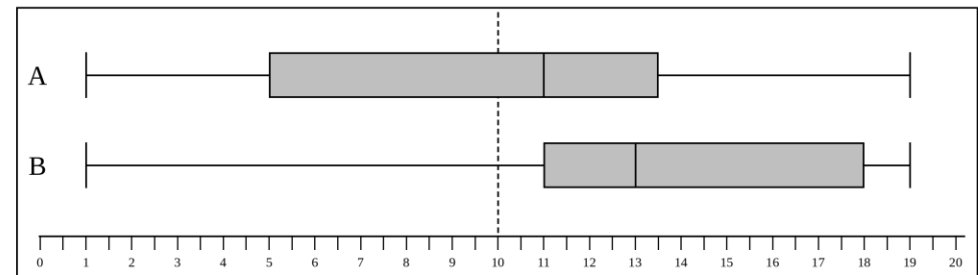
Bepaal in welke boxplot een groter deel van de steekproef boven 10 ligt.



Bepaal in welke boxplot een groter deel van de steekproef boven 10 ligt.



Bepaal in welke boxplot een groter deel van de steekproef boven 10 ligt.



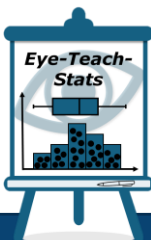
Bepaal in welke boxplot een groter deel van de steekproef boven 10 ligt.

☐ A

☐ B

☐ C

☐ D



Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the National Agency. Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

17 Histogram

Vignette over een fout op basis van een verwarring tussen
frequentie en waarde

Introducing situation



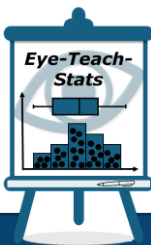
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 4de jaar secundair onderwijs / vierde klas over data-interpretatie. Je geeft je leerlingen de opdracht om bij benadering het gemiddelde te bepalen van de gewichten die in een histogram zijn weergegeven.

Je ziet dat een van je leerlingen, Fabian, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Hij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Fabian aan werkt.



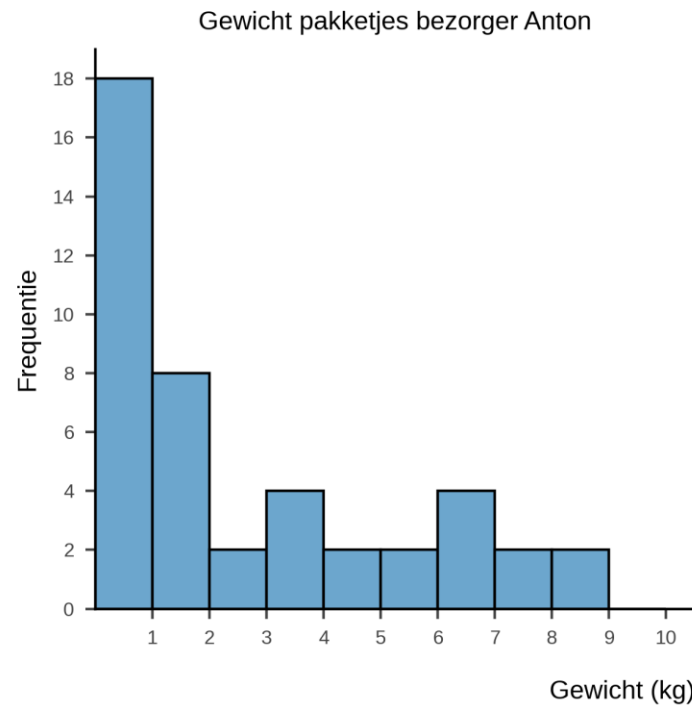
Students task



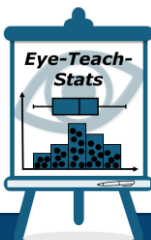
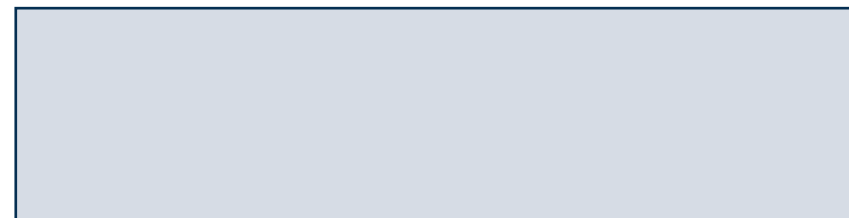
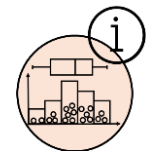
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht van de pakketjes die Anton bezorgt?



Dit is de taak waar Fabian aan werkt. **Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.**



Introducing eye-tracking

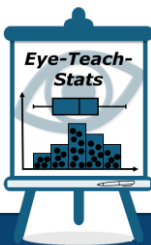


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een oogbewegingsvideo krijgen van je leerling Fabian, die gemaakt werd terwijl hij aan de taak werkte. De oogbewegingsvideo geeft aan waar zijn visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



First look

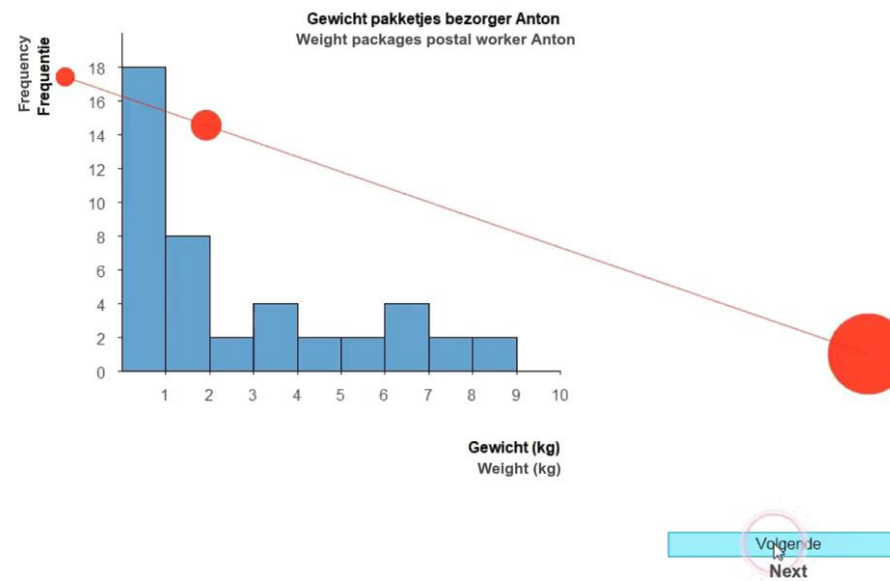


Co-funded by
the European Union

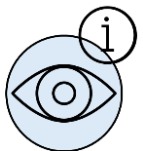
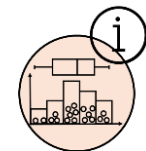
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Fabians antwoord: “Het rekenkundige gemiddelde is ongeveer zes.”

What is approximately the mean weight of the packages Anton delivers?
Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht van de pakketjes die Anton bezorgt?



Kijk naar de oogbewegingsvideo die de oogbewegingen van je leerling Fabian toont en naar zijn antwoord.



Take perspective

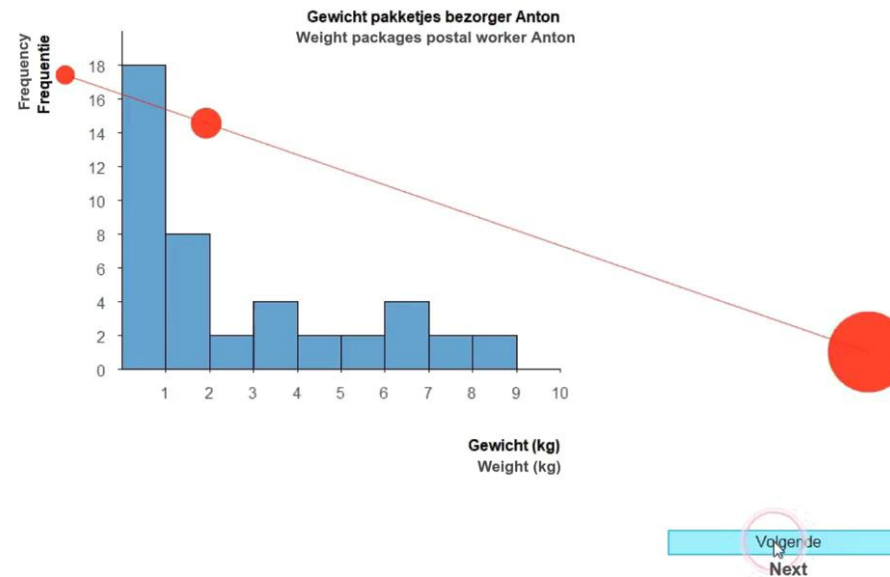


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

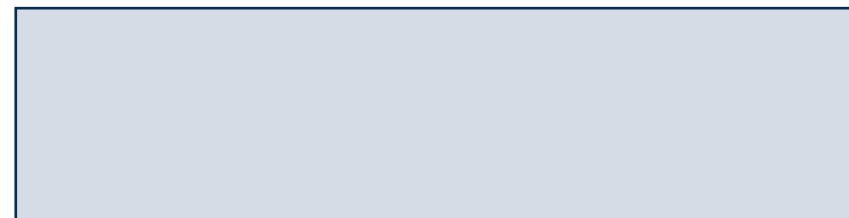
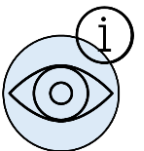
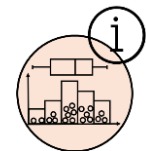
Fabians antwoord: “Het rekenkundige gemiddelde is ongeveer zes.”

What is approximately the mean weight of the packages Anton delivers?
Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht van de pakketjes die Anton bezorgt?



Na de taak werd aan Fabian zijn eigen oogbewegingsvideo getoond. Bij het terugkijken legt hij uit wat hij aan het denken was terwijl hij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Fabian te nemen, en formuleer wat hij gezegd kan hebben.



Indicate assumption

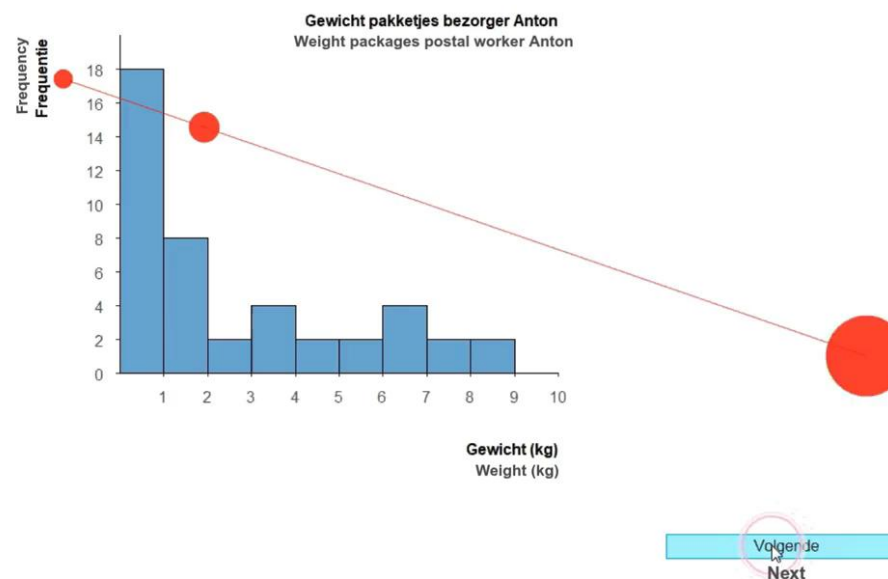


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Fabians commentaar: “Ik keek naar de waarden op de as – ik zag vooral lage waarden en één hoge, dus schatte ik dat het ergens rond zes zou liggen.”

What is approximately the mean weight of the packages Anton delivers?
Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht van de pakketjes die Anton bezorgt?

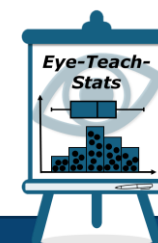
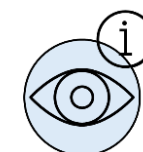
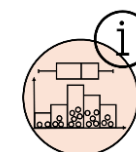


Je kan nu het echte commentaar van Fabian lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.

- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



Evaluate solution

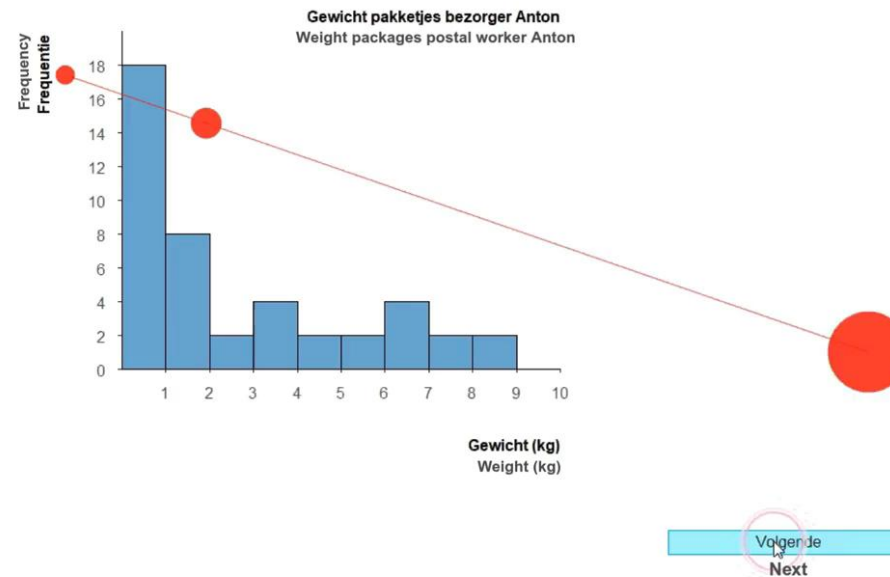


Co-funded by
the European Union

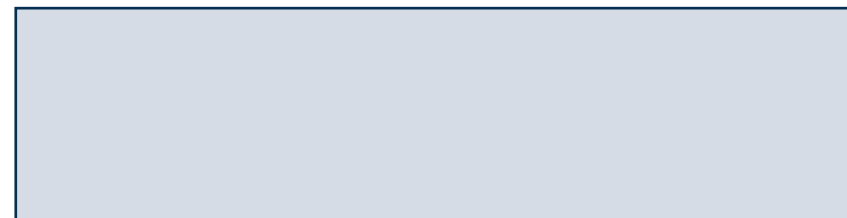
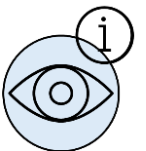
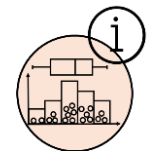
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Fabians commentaar: “Ik keek naar de waarden op de as – ik zag vooral lage waarden en één hoge, dus schatte ik dat het ergens rond zes zou liggen.”

What is approximately the mean weight of the packages Anton delivers?
Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht van de pakketjes die Anton bezorgt?



Evalueer Fabians oplossing. Wat kan je zeggen van zijn begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

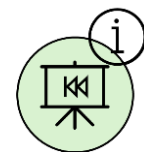
Begrijpen van fouten van leerlingen

Fabian heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid bij het interpreteren van histogrammen. Die leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd de “**frequentie-waarde-verwarring**”.

Observeerbaar gedrag: Fabian gaf aan dat hij naar de waarden op de [verticale] as keek, daarbij vooral lage waarden en één hoge waarde opmerkte, en het gemiddelde schatte op ongeveer zes. De oogbewegingsvideo bevestigt dit: zijn blik bewoog langs de verticale as en bleef hangen bij de frequentiewaarden. Dit wijst op een observeerbare systematische fout, die we omschrijven als frequentie-waarde-verwarring bij het interpreteren van histogrammen.

Interpretatie door de leerkracht/onderzoeker: Het lijkt erop dat Fabian een strategie op het histogram toepaste die typisch gebruikt wordt voor casus-staafdiagrammen. Uit Fabians uitleg en oogbewegingen blijkt dat hij de frequentiewaarden op de verticale as las alsof het de gemeten waarden zelf waren, en daaruit het gemiddelde schatte. In een histogram geven de staafhoogten echter frequenties weer, niet de gemeten waarden. Fabians aanpak wijst op verwarring over wat de data zijn en wat de assen voorstellen. Bij een histogram toont de horizontale as de gemeten waarden (in dit geval het gewicht in kg), terwijl de verticale as het aantal metingen binnen een bepaald interval (de klassebreedte van de staaf) weergeeft. De fout ontstaat wanneer leerlingen de staafhoogten (frequentie) interpreteren als de gemeten waarde, in plaats van als het aantal metingen binnen een bepaald interval. Hoewel deze strategie onjuist is voor histogrammen, werkt ze wél voor het bepalen van het rekenkundig gemiddelde bij een casus-staafdiagram.

Onderliggende conceptuele moeilijkheid: Fabians systematische fout is waarschijnlijk het gevolg van een onderliggende conceptuele moeilijkheid met het begrip data (waar, hoe en welke data worden weergegeven), doordat hij geen onderscheid maakt tussen frequenties en gemeten waarden in een histogram. Dergelijke conceptuele moeilijkheden komen vaak voor wanneer leerlingen niet begrijpen dat de verticale as in een histogram weergeeft hoeveel gevallen er binnen elke klasse vallen, en niet de gemeten waarde zelf.

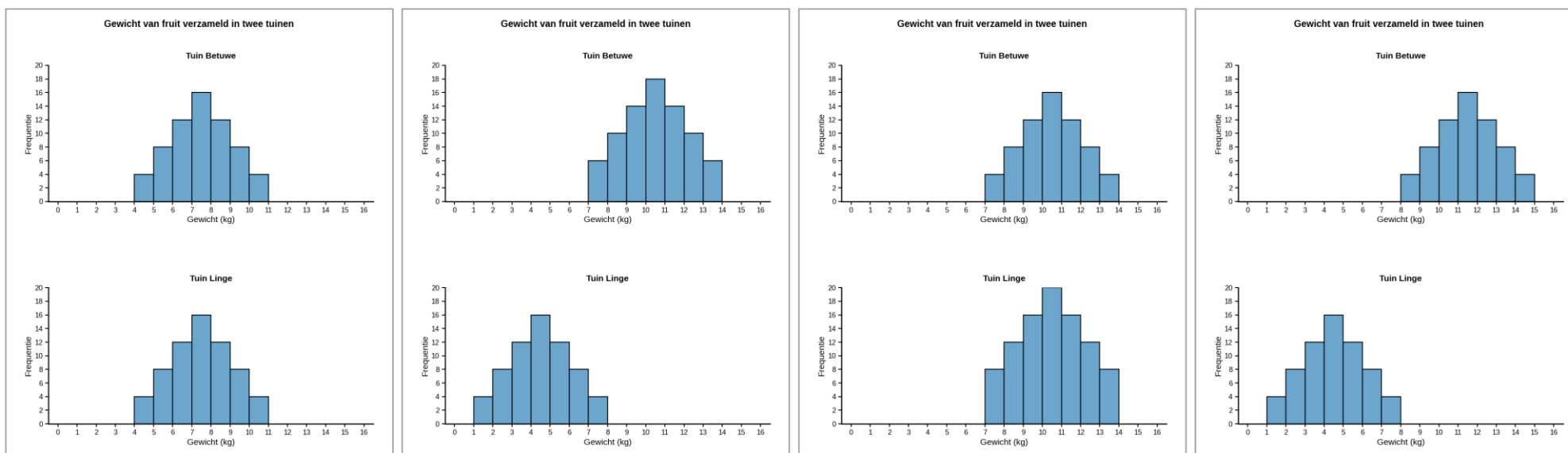


Practice



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.



Een groep leerlingen nam deel aan een wetenschapproject waarin ze het gewicht (in kilogram) van fruit uit verschillende tuinen maten en noteerden. Elk van de vier leerlingengroepen verzamelde fruit uit twee verschillende tuinen en maakte een paar histogrammen om de gewichtsverdelingen weer te geven.

Later werd een leerling, Jamie, gevraagd om deze vier histrogramparen te bekijken en de gemiddelde gewichten van de twee tuinen in elk paar te vergelijken. Jamie heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid bij het interpreteren van histogrammen. Die leidt tot een observeerbare systematische fout, de frequentie-waarde-verwarring, waarbij Jamie de neiging heeft om de hoogte van een staaf te interpreteren als een datawaarde in plaats van als een frequentie.

Bij welke histrogramparen leidt Jamies redeneerstrategie waarschijnlijk tot een foute conclusie over het gemiddelde? Selecteer alle juiste antwoorden.

☐ A

☐ B

☐ C

☐ D



18 Case-Value Plot

Vignette over een fout op basis van een overgeneralisatie
van een histogrambenadering

Introducing situation



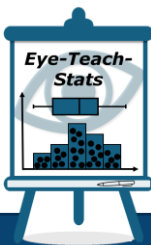
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 4de jaar secundair onderwijs / vierde klas over data-interpretatie. Je geeft je leerlingen de opdracht om bij benadering het gemiddelde te bepalen van de gewichten die in een casus-staafdiagram zijn weergegeven.

Je ziet dat een van je leerlingen, Ella, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Zij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Ella aan werkt.

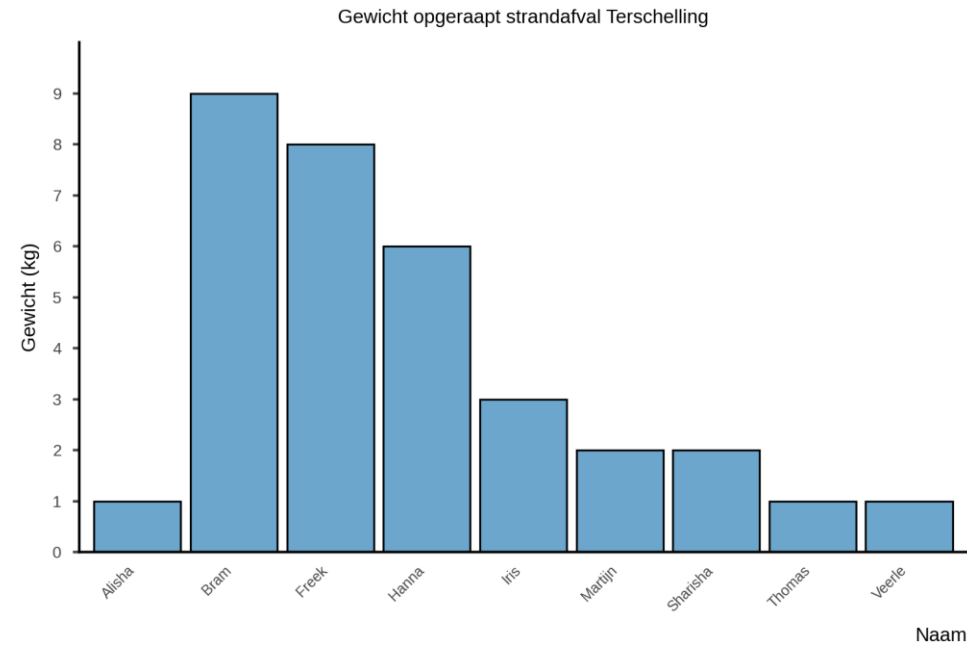


Students task



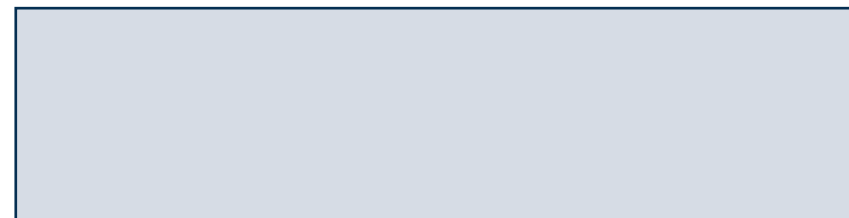
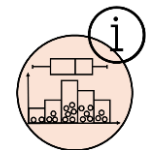
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.



Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht dat per persoon werd verzameld?

Dit is de taak waar Ella aan werkt. **Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.**



Introducing eye-tracking

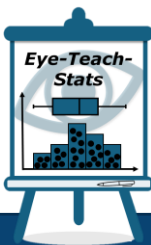


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een oogbewegingsgrafiek krijgen van je leerling Ella, die gemaakt werd terwijl zij aan de taak werkte. De oogbewegingsgrafiek geeft aan waar haar visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



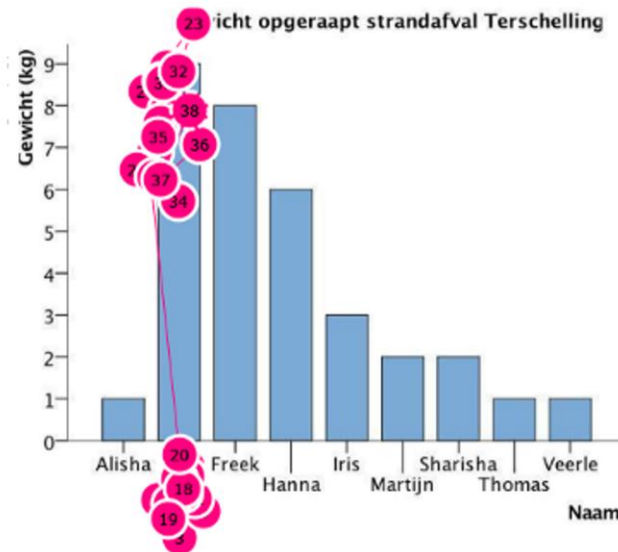
First look



Co-funded by
the European Union

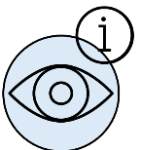
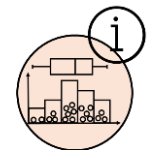
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Ella's antwoord: "Het gemiddelde gewicht is negen."



Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht dat per persoon werd verzameld?

Kijk naar de oogbewegingsgrafiek die de oogbewegingen van je leerling Ella toont en naar haar antwoord.



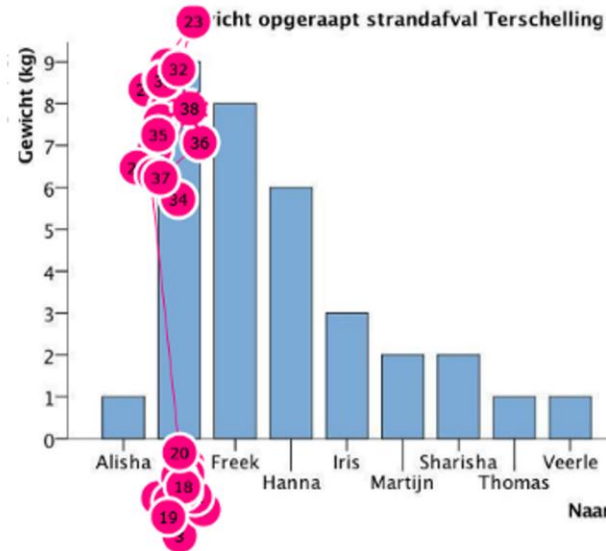
Take perspective



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

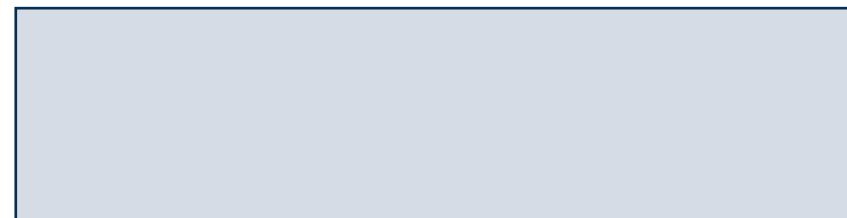
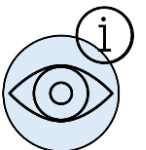
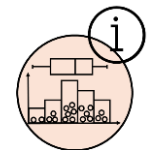
Ella's antwoord: "Het gemiddelde gewicht is negen."



Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht dat per persoon werd verzameld?

Na de taak werd aan Ella haar eigen oogbewegingsgrafiek getoond. Bij het terugkijken legt zij uit wat zij aan het denken was terwijl zij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Ella te nemen, en formuleer wat zij gezegd kan hebben.



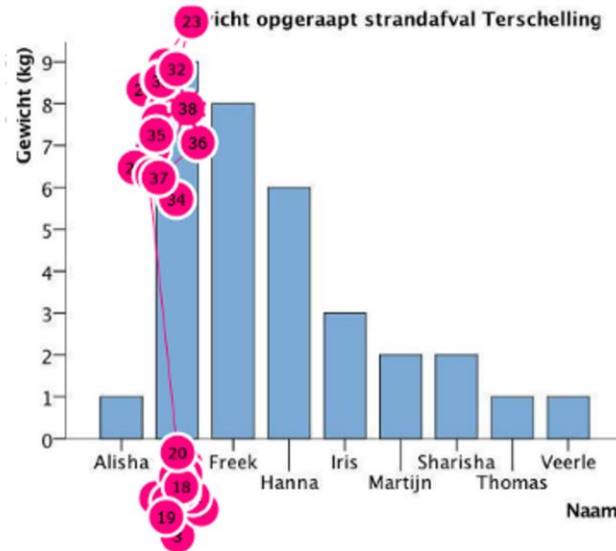
Indicate assumption



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Ella's commentaar: "Ik keek waar de grafiek ongeveer in evenwicht was, en dat leek rond Bram te zijn, dus nam ik 9 als gemiddelde."



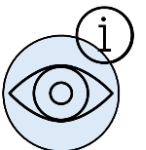
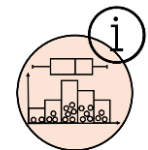
Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht dat per persoon werd verzameld?

Je kan nu het echte commentaar van Ella lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.

- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



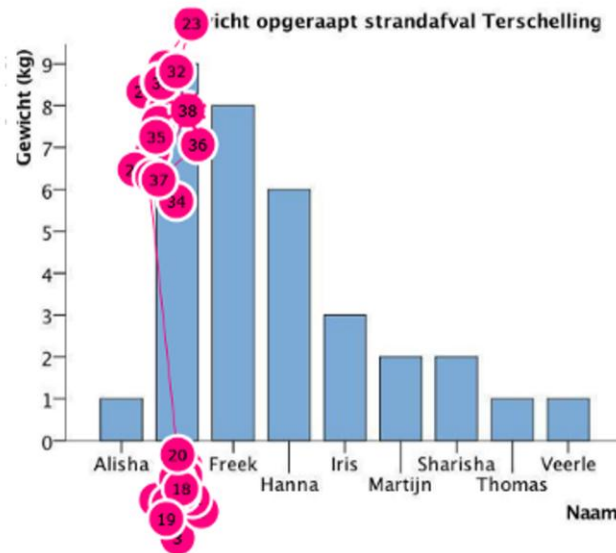
Evaluate solution



Co-funded by
the European Union

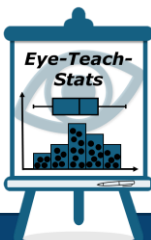
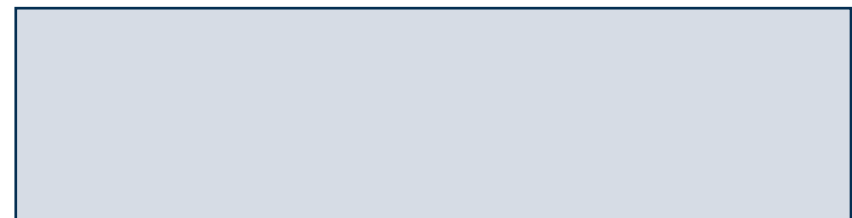
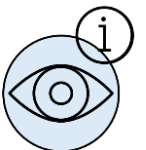
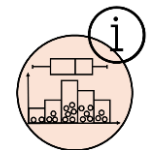
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Ella's commentaar: "Ik keek waar de grafiek ongeveer in evenwicht was, en dat leek rond Bram te zijn, dus nam ik 9 als gemiddelde."



Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht dat per persoon werd verzameld?

Evalueer Ella's oplossing. Wat kan je zeggen van haar begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

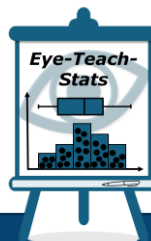
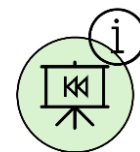
Begrijpen van fouten van leerlingen

Ella heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid bij het interpreteren van casus-staafdiagrammen. Dit leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd de “**overgeneralisatie van een histogrambenadering**”.

Observeerbaar gedrag: Ella legde uit dat ze zocht naar het punt waar de grafiek in evenwicht was, en dat dit ongeveer bij Bram leek te liggen, waardoor ze het gemiddelde schatte op 9 kg. Haar oogbewegingsdata tonen dat Ella's fixaties op en neer bewogen tussen een punt op de horizontale as en de toppen van de staven, wat een verticaal kijkpatroon rond de staaf van Bram opleverde. Samen wijst dit observeerbare gedrag op een systematische fout, die we de overgeneralisatie van een histogrambenadering bij het interpreteren van casus-staafdiagrammen noemen.

Interpretatie door de leerkracht/onderzoeker: Het lijkt erop dat Ella een redenering toepaste die typisch gebruikt wordt voor histogrammen – het visueel zoeken naar het balanspunt langs de horizontale as – en de positie van Bram als dat punt aanduidde. Zo'n strategie is gepast voor histogrammen, waar het balanspunt op de horizontale as ongeveer overeenkomt met het gemiddelde van de verdeling. Ze werd hier echter onterecht getransfereerd naar een casus-staafdiagram, waar elke staaf één individuele gemeten waarde voorstelt en het gemiddelde niet gevonden wordt door een balanspunt op de horizontale as te zoeken.

Onderliggende conceptuele moeilijkheid: Ella's systematische fout is waarschijnlijk te wijten aan een onderliggende conceptuele moeilijkheid met de relatie tussen het concept verdeling en het concept centrum, en daardoor in het begrijpen hoe het gemiddelde wordt bepaald in casus-staafdiagrammen versus histogrammen. In een casus-staafdiagram is de hoogte van elke staaf een gemeten waarde, en wordt het gemiddelde geschat door een horizontale lijn te zoeken die alle staven even hoog zou maken. In een histogram stellen de staafhoogten frequenties voor, en komt het balanspunt van de grafiek langs de horizontale as ongeveer overeen met het gemiddelde.



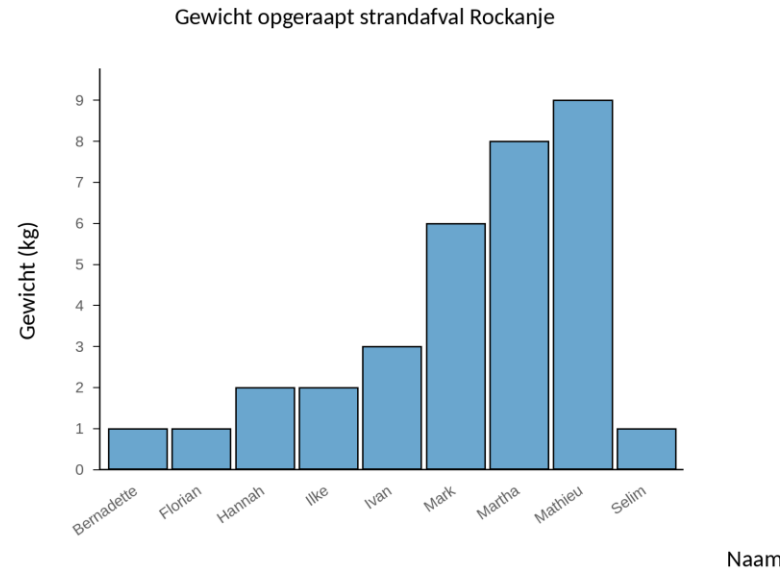
Practice



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep van negen mensen verzamelde strandafval aan de kust van Rockanje. Het gewicht (in kg) dat elke persoon verzamelde, is weergegeven in het casus-staafdiagram hieronder. Vergelijk de verzamelde hoeveelheden en beoordeel vervolgens: wat was het gemiddelde gewicht dat per persoon werd verzameld?



Drie leerlingen beschreven een verschillende redenering bij het oplossen van de taak. Welk antwoord past het best bij de aanname dat deze leerling een histogrambenadering overgeneraliseert naar een casus-staafdiagram, wat tot een fout antwoord leidt?

Robin: Ik heb de gewichten die alle negen mensen verzamelden bij elkaar opgeteld en het totaal door negen gedeeld. Dat gaf me een gemiddelde van ongeveer 3,7 kg.

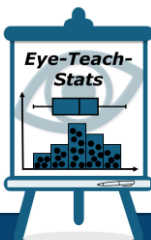
Sam: Ik stelde me voor dat ik de gewichten zo herverdeelde dat alle negen staven even hoog waren. Dat niveau lag iets onder 4 kg, dus schatte ik het gemiddelde op ongeveer 4 kg.

Alex: Ik zocht waar de staven van links naar rechts in evenwicht leken te zijn, zoals bij het vinden van het midden van een verdeling. Dat punt lag ongeveer bij Mark, dus nam ik Marks waarde, 6 kg, als gemiddelde.

☐ Robin

☐ Sam

☐ Alex



Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the National Agency. Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

19 Histogram

Vignette over een fout op basis van een overgeneralisatie
van de som van frequenties

Introducing situation

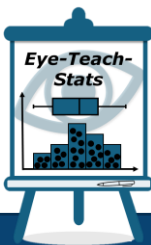


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 4de jaar secundair onderwijs / vierde klas over data-interpretatie. Je geeft je leerlingen de opdracht om bij benadering het gemiddelde te bepalen van de gewichten die in een histogram zijn weergegeven.

Je ziet dat een van je leerlingen, Martijn, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Hij geeft een fout antwoord.



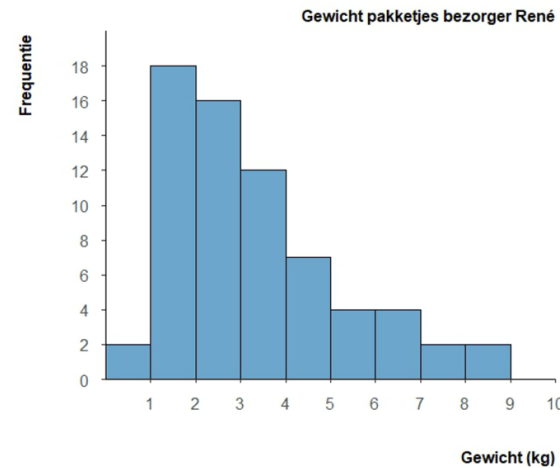
Students task



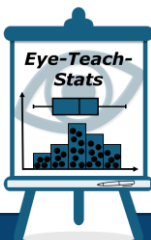
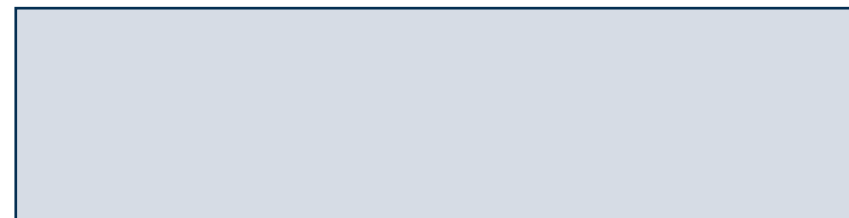
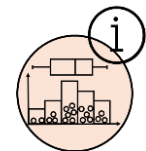
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht van de pakjes die René bezorgt?



Dit is de taak waar Martijn aan werkt. Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.



Introducing eye-tracking

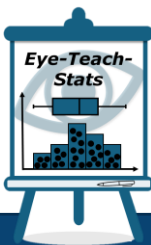


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een oogbewegingsgrafiek krijgen van je leerling Martijn, die gemaakt werd terwijl hij aan de taak werkte. De oogbewegingsgrafiek geeft aan waar zijn visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



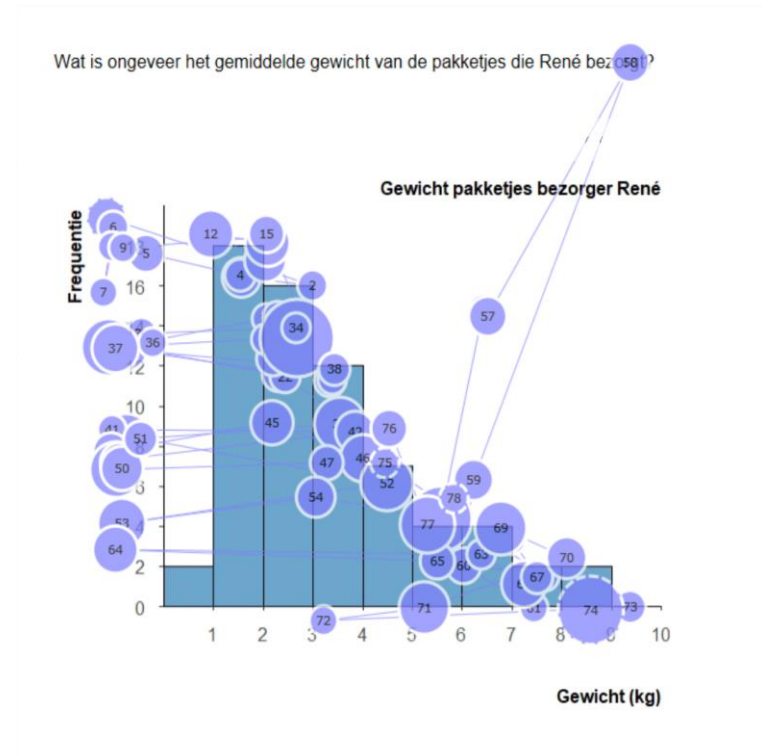
First look



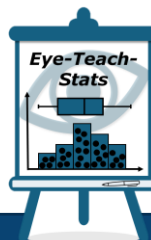
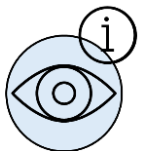
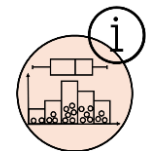
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Martijns antwoord: "Het rekenkundige gemiddelde is ongeveer zes."



Kijk naar de oogbewegingsgrafiek die de oogbewegingen van je leerling Martijn toont en naar zijn antwoord.



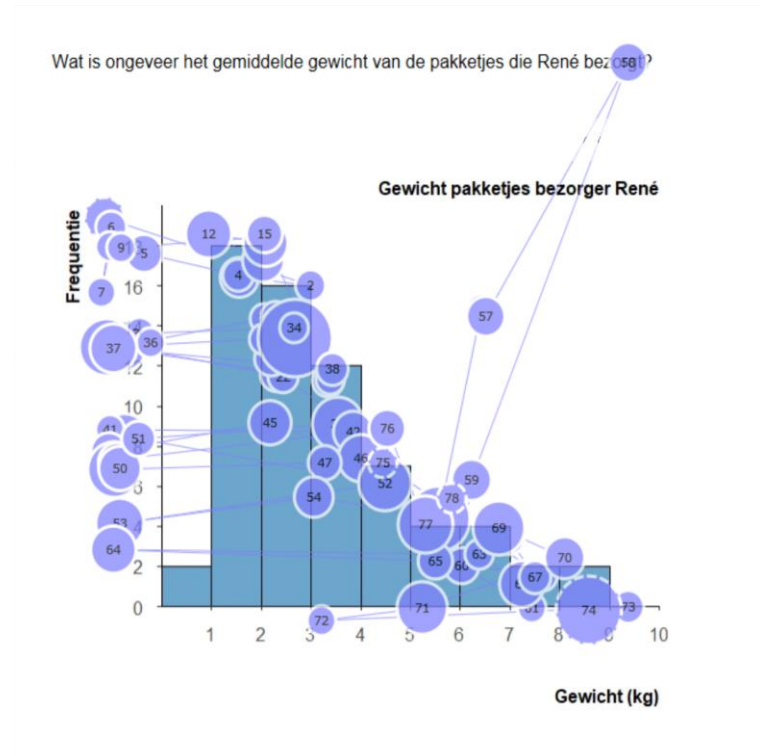
Take perspective



Co-funded by
the European Union

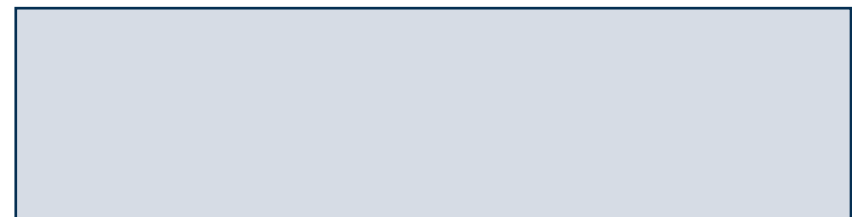
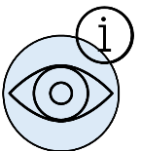
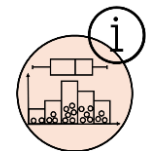
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Martijns antwoord: “Het rekenkundige gemiddelde is ongeveer zes.”



Na de taak werd aan Martijn zijn eigen oogbewegingsgrafiek getoond. Bij het terugkijken legt hij uit wat hij aan het denken was terwijl hij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Martijn te nemen, en formuleer wat hij gezegd kan hebben.



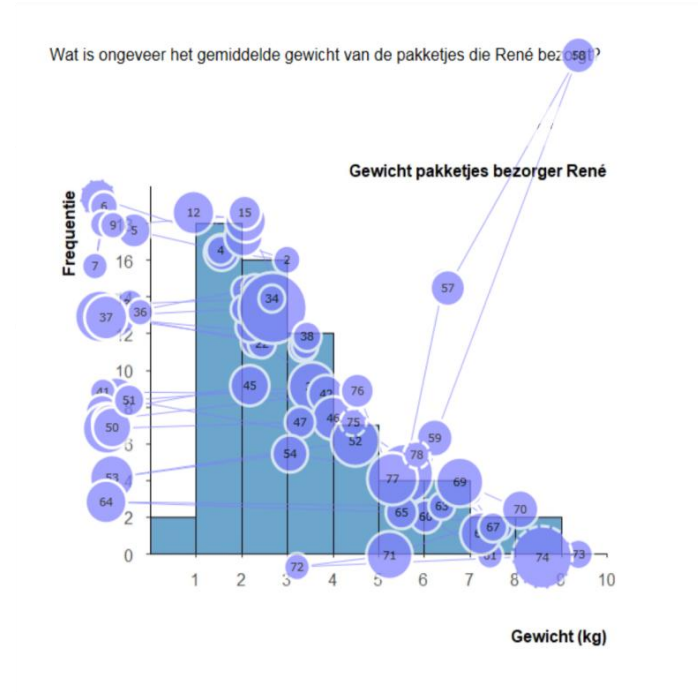
Indicate assumption



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Martijns commentaar: "Ik las af hoeveel elke staaf was en telde die bij elkaar op. Dus ik begon met twee, dan achttien, dan zestien, en ik bleef optellen terwijl ik naar de staven keek. Daarna deelde ik door negen."

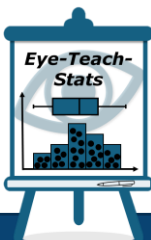
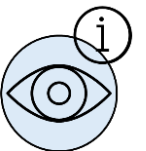
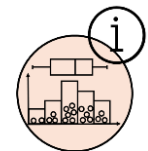


Je kan nu het echte commentaar van Martijn lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.

- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



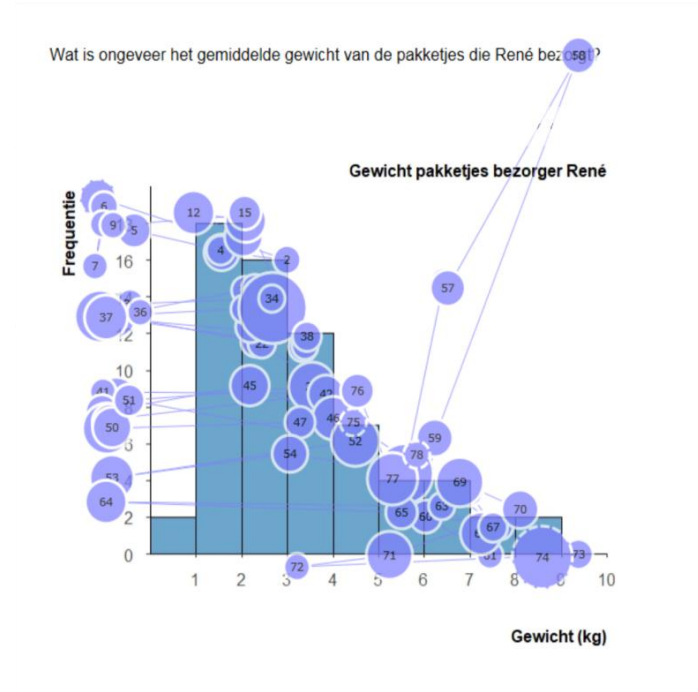
Evaluate solution



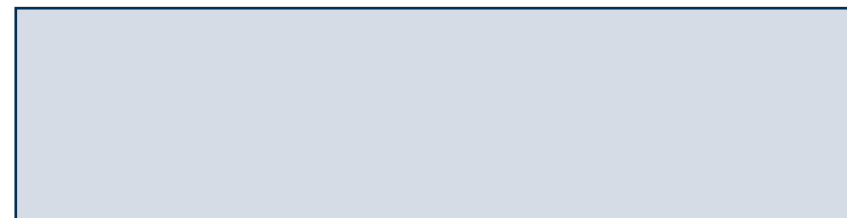
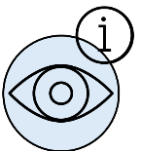
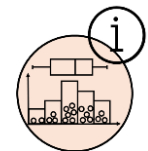
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Martijns commentaar: "Ik las af hoeveel elke staaf was en telde die bij elkaar op. Dus ik begon met twee, dan achttien, dan zestien, en ik bleef optellen terwijl ik naar de staven keek. Daarna deelde ik door negen."



Evalueer Martijns oplossing. Wat kan je zeggen van zijn begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Begrijpen van fouten van leerlingen

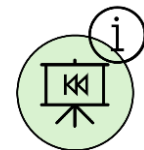
Martijn heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid bij het interpreteren van histogrammen. Dit leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd “**som voor gemiddelde: som van frequenties**”.

Observeerbaar gedrag: Martijns mondelinge uitleg toont een duidelijke procedurele aanpak: hij las de hoogte van elke staaf af en hield een lopend totaal bij – hij begon met twee, telde er achttien bij, dan zestien, enzovoort. Daarna deelde hij deze som door negen. Zijn oogbewegingen ondersteunen dit: de fixaties bewegen systematisch langs de y-as en blijven langer hangen bij bepaalde staafhoogten, wat suggereert dat hij frequentiewaarden afleest en optelt. Vervolgens verschuift zijn blik naar de x-as, naar het getal 9, dat overeenkomt met het totale aantal staven. Samen wijst dit gedrag op een observeerbare systematische fout, die we “som voor gemiddelde: som van frequenties” noemen.

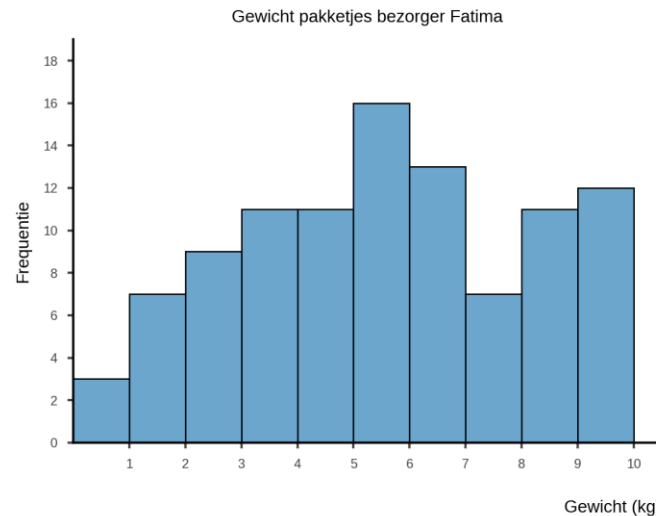
Interpretatie door de leerkracht/onderzoeker: Martijns aanpak toont dat hij de staafhoogten – die frequenties voorstellen – gebruikte als de waarden die hij optelde om het gemiddelde te berekenen. Hij telde de frequenties op de verticale as bij elkaar op en deelde door het aantal staven, wat 6 opleverde. De langere fixaties op de y-as en de staven weerspiegelen waarschijnlijk het optellen in zijn hoofd terwijl hij elke staaf afleest. In een histogram geeft de verticale as weer hoeveel metingen er binnen elke klasse vallen, niet de gemeten waarden zelf; die staan op de horizontale as. De fout ontstaat wanneer leerlingen de frequenties optellen en delen door het aantal staven: ze passen een procedure toe die lijkt op het berekenen van een rekenkundig gemiddelde, maar dan met de verkeerde waarden. Hoewel het optellen van de staafhoogten en delen door het aantal staven een geldige procedure zou zijn bij een casus-staafdiagram – waar de staafhoogten gemeten waarden voorstellen – is ze niet geschikt voor een histogram, waar de staafhoogten frequenties voorstellen.

Onderliggende conceptuele moeilijkheid: Martijns systematische fout is waarschijnlijk het gevolg van een onderliggende conceptuele moeilijkheid met het begrip data (waar, hoe en welke data worden weergegeven), doordat hij geen onderscheid maakt tussen de rol van de verticale as in een histogram en in een casus-staafdiagram. Dergelijke conceptuele moeilijkheden komen vaak voor wanneer leerlingen niet begrijpen dat de verticale as in een histogram weergeeft hoeveel gevallen er binnen elke klasse vallen, en dat deze frequentiewaarden niet zijn wat opgeteld moet worden om het gemiddelde te vinden.

Correcte strategieën voor histogrammen: In een histogram kan het gemiddelde worden geschat door het punt op de horizontale as te vinden waar het histogram (de verdeling) in balans is. In dat geval zou de blik op en neer bewegen tussen een punt op de horizontale as en de toppen van de staven, wat een kijkpatroon oplevert langs een denkbeeldige verticale lijn. Het gemiddelde kan ook worden geschat via een berekening: door het midden van elke klasse (dat de gemeten waarden binnen die klasse vertegenwoordigt) te vermenigvuldigen met de bijbehorende frequentie (de hoogte van de staaf), deze producten op te tellen en vervolgens te delen door de som van de frequenties (het totale aantal datapunten).

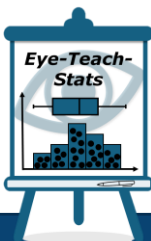


Het histogram hieronder toont het gewicht van de pakketjes die postbode Fatima bezorgde. Elis bekeek het histogram en zei dat het gemiddelde „rond 10” ligt. Het werkelijke gemiddelde op basis van de data is echter ongeveer 5,5.



Welke van de volgende redeneerstrategieën leidde het meest waarschijnlijk tot de foute oplossing „rond 10” voor het gemiddelde gewicht van de pakketjes? Kies één optie.

- a) Elis telde de frequenties op en deelde door het aantal staven.
- b) Elis nam aan dat het gemiddelde in het midden van de x-as ligt, zonder rekening te houden met de verdeling van de data.
- c) Elis focuste op de hoogste staaf en nam aan dat de waarde daarvan het gemiddelde is.
- d) Elis keek naar de waarden op de x-as en berekende hun gemiddelde, zonder rekening te houden met de frequenties.
- e) Elis schatte het gemiddelde door een evenwichtspunt in het histogram te zoeken, alsof hij een verticale lijn plaatste waar de verdeling visueel in evenwicht lijkt.





Eye-Teach-Stats Eye-Tracking Vignettes © 2026



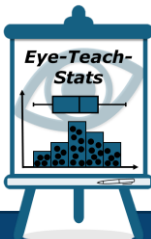
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the National Agency. Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

20 Histogram

Vignette over een fout op basis van een tel-en-rekenstrategie (count-and-compute)



Introducing situation



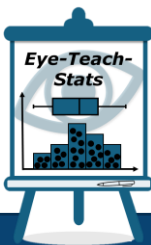
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Stel je voor dat je les geeft in een klas in het 4de jaar secundair onderwijs / vierde klas over data-interpretatie. Je leidt leerlingen in in het vergelijken van de verdelingen van data via histogrammen.

Je ziet dat een van je leerlingen, Erika, moeilijkheden ondervindt met de taak die je hebt gegeven. Zij geeft een fout antwoord.

Je zal nu de taak zien waar Erika aan werkt.

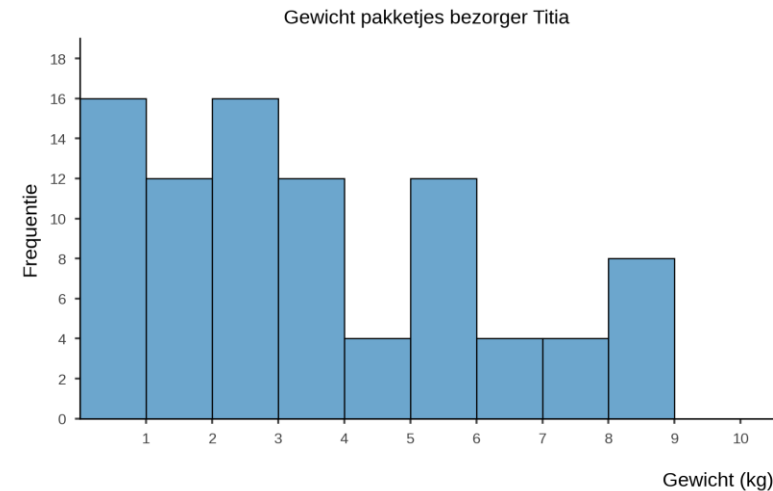
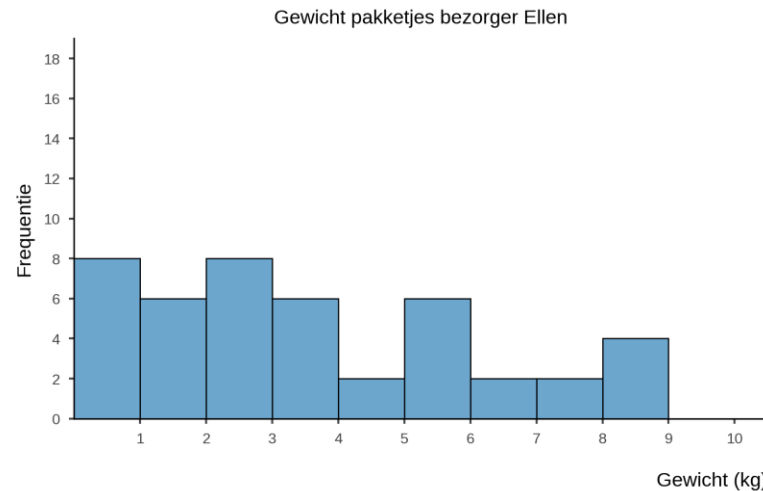


Students task



Co-funded by
the European Union

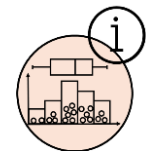
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.



Welke postbezorger bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten?

- a) Ellen bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten.
- b) Titia bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten.
- c) Het gemiddelde gewicht is ongeveer gelijk voor beiden.

Dit is de taak waar Erika aan werkt. **Vervolledig de taak eerst zelf en vul je oplossing in.**



- a) Ellen bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten.
- b) Titia bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten.
- c) Het gemiddelde gewicht is ongeveer gelijk voor beiden.



Introducing eye-tracking

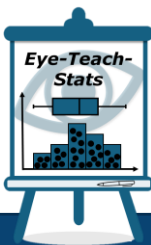


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een groep onderzoekers op het gebied van wiskundeonderwijs onderzoekt de mogelijkheid om docenten te ondersteunen met aanvullend diagnostisch materiaal: oogbewegingsgegevens die met behulp van oogvolgtechnologie bij leerlingen worden verzameld, worden als aanvullend materiaal verstrekt.

Je zal een oogbewegingsvideo krijgen van je leerling Erika, die gemaakt werd terwijl zij aan de taak werkte. De oogbewegingsvideo geeft aan waar haar visuele focus ligt. Vaak is het mogelijk om af te leiden wat het denkproces van je leerling is geweest.



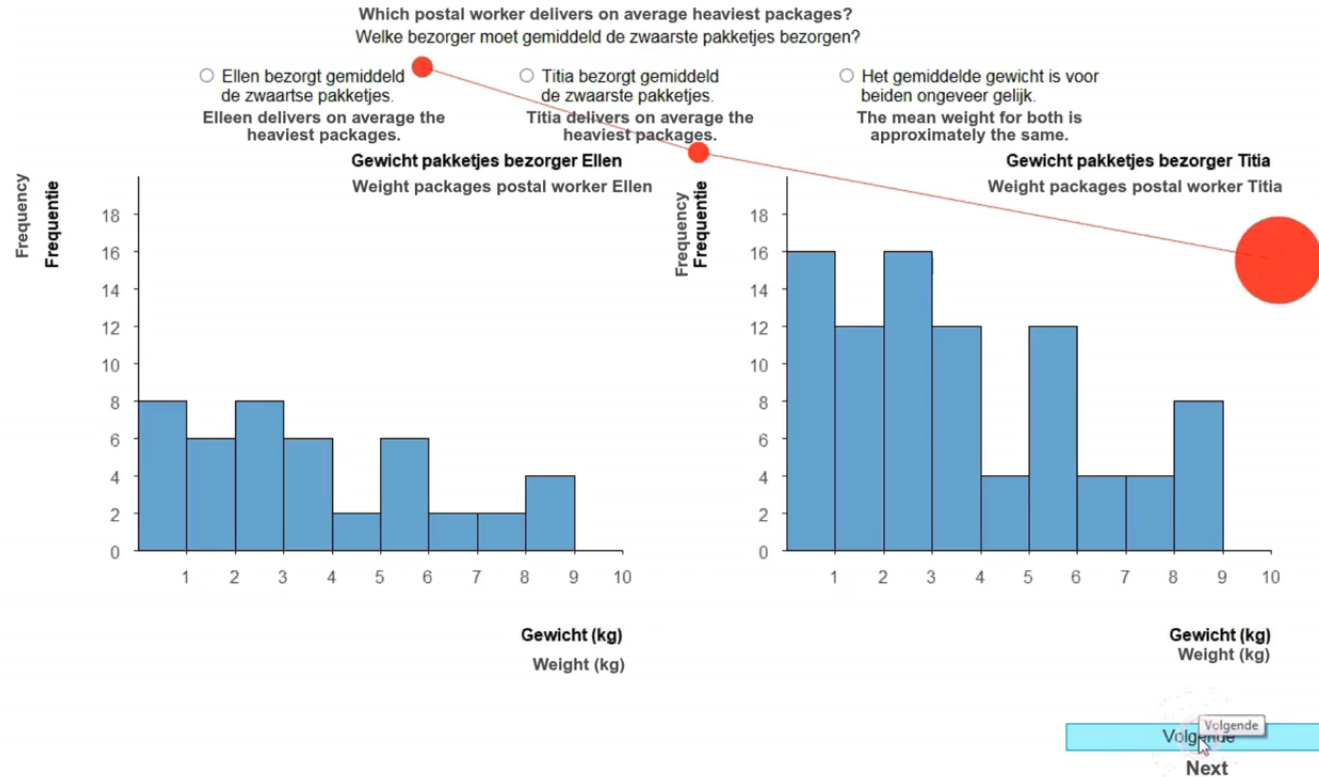
First look



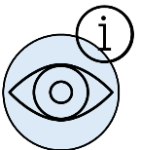
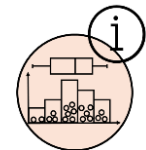
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Erika's antwoord: "Titia bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten."



Kijk naar de oogbewegingsvideo die de oogbewegingen van je leerling Erika toont en naar haar antwoord.



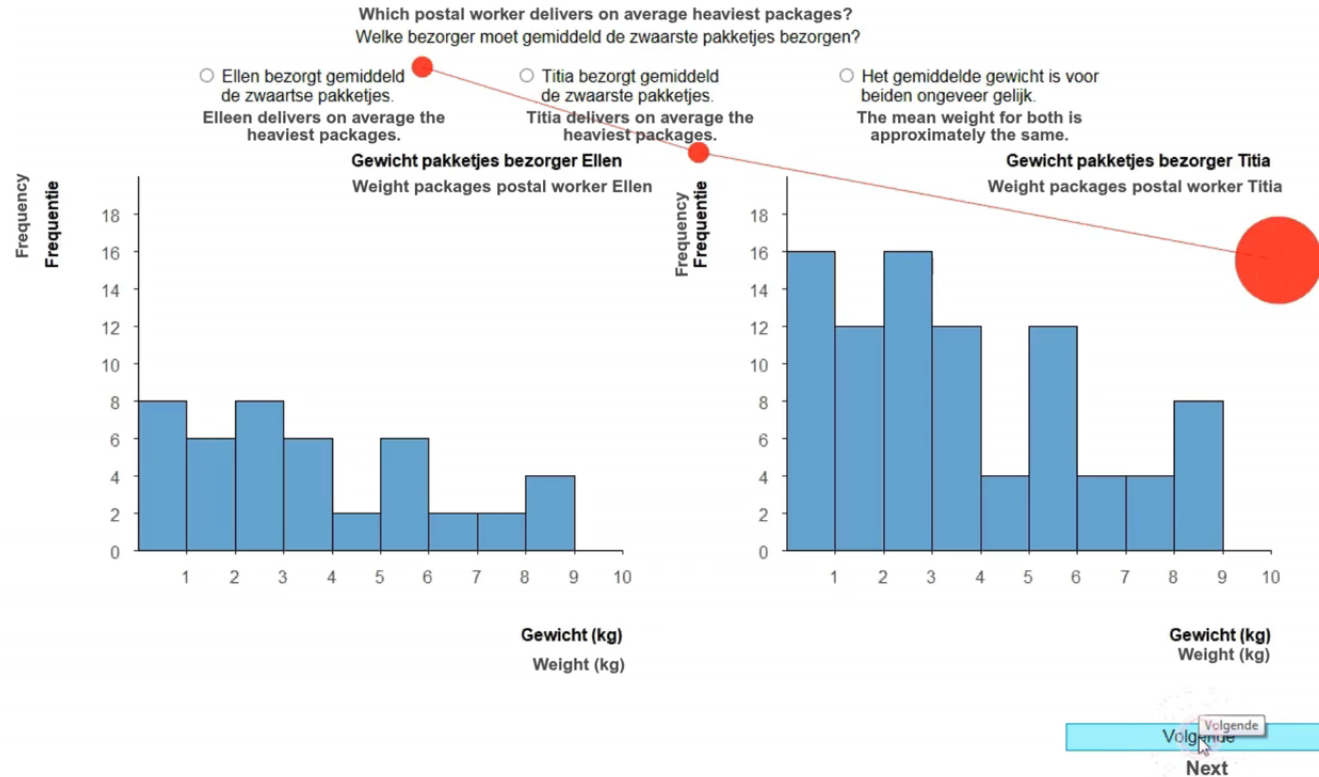
Take perspective



Co-funded by
the European Union

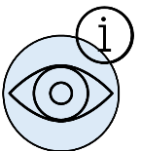
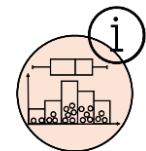
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Erika's antwoord: "Titia bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten."



Na de taak werd aan Erika haar eigen oogbewegingsvideo getoond. Bij het terugkijken legt zij uit wat zij aan het denken was terwijl zij aan de taak werkte.

Probeer het perspectief van Erika te nemen, en formuleer wat zij gezegd kan hebben.



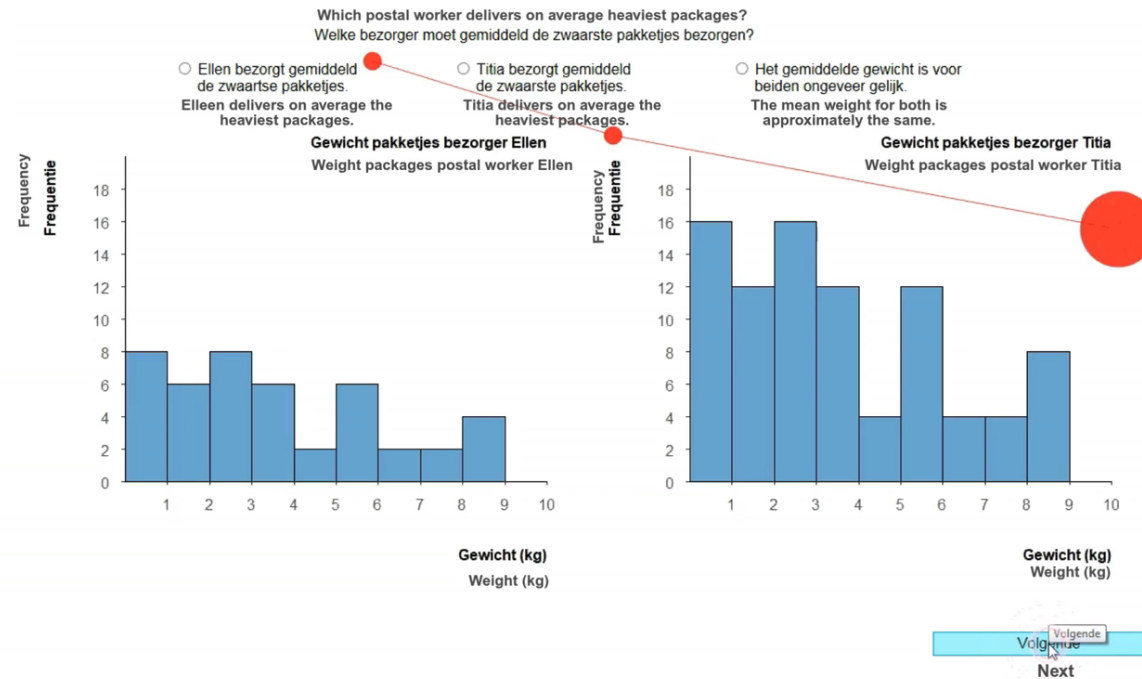
Indicate assumption



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Erika's commentaar: "Ik wilde het gemiddelde gewicht vinden, dus ik keek naar elke staaf. Bij elke staaf vermenigvuldigde ik de gewichtswaarde met de frequentie waarmee die voorkwam. Daarna telde ik al die resultaten bij elkaar op en deelde ik door het aantal staven, omdat elke staaf een deel van de data voorstelt. Dat deed ik voor beide histogrammen en ik kreeg een hoger resultaat voor Titia, dus koos ik Titia."

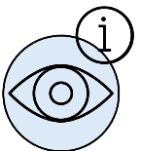
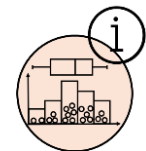


Je kan nu het echte commentaar van Erika lezen.

Geef aan hoe goed jouw aannames in lijn zijn met wat hier wordt voorgesteld.

- ☐ Helemaal geen overeenstemming
- ☐ Weinig overeenstemming

- ☐ Nogal wat overeenstemming
- ☐ Volledige overeenstemming



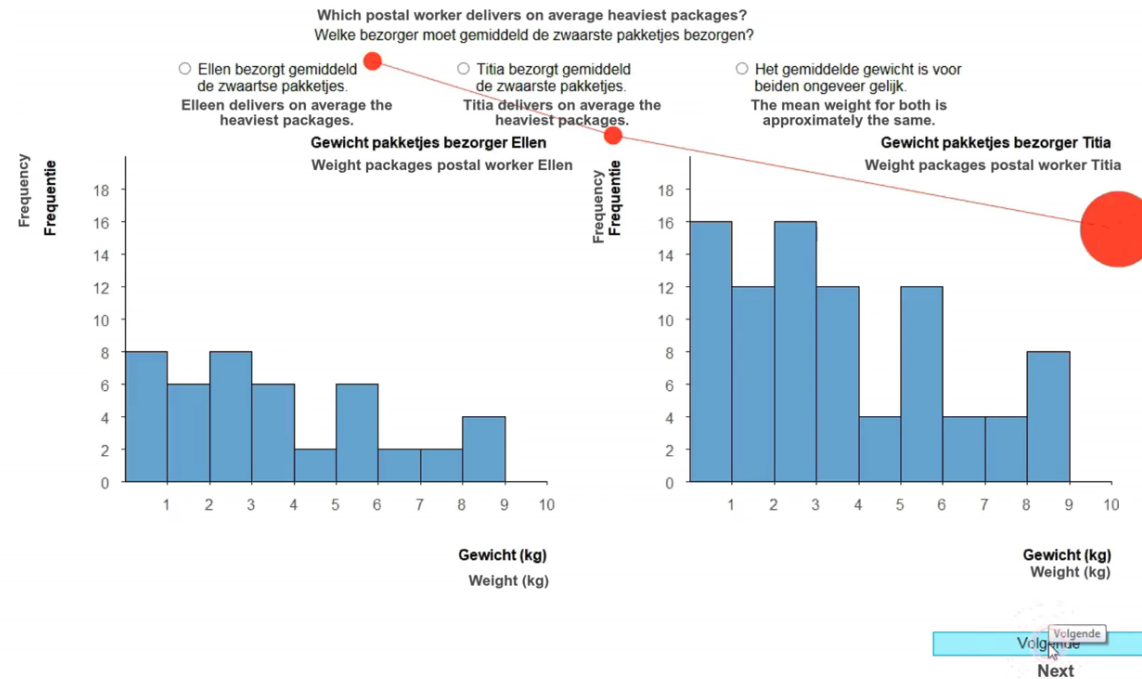
Evaluate solution



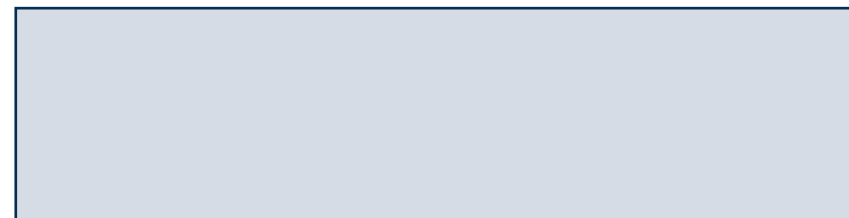
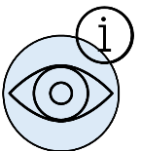
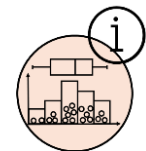
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Erika's commentaar: "Ik wilde het gemiddelde gewicht vinden, dus ik keek naar elke staaf. Bij elke staaf vermenigvuldigde ik de gewichtswaarde met de frequentie waarmee die voorkwam. Daarna telde ik al die resultaten bij elkaar op en deelde ik door het aantal staven, omdat elke staaf een deel van de data voorstelt. Dat deed ik voor beide histogrammen en ik kreeg een hoger resultaat voor Titia, dus koos ik Titia."



Evalueer Erika's oplossing. Wat kan je zeggen van haar begrip?



Introducing systematic error



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

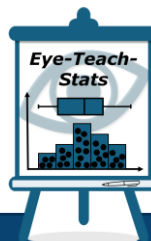
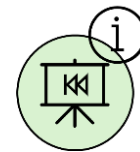
Begrijpen van fouten van leerlingen

Erika heeft een onderliggende conceptuele moeilijkheid bij het interpreteren van histogrammen wanneer ze gemiddelden vergelijkt. Dit leidt tot een observeerbare systematische fout, genaamd **“te veel nadruk leggen op lokale kenmerken: een tellen-reken-strategie”**.

Observeerbaar gedrag: Erika gaf aan dat ze de gewichtswaarden vermenigvuldigde met de frequenties en het resultaat deelde door het aantal staven. Ze paste deze werkwijze toe op beide histogrammen en besloot dat Titia gemiddeld de zwaarste pakketten bezorgt. De oogbewegingsdata tonen dat Erika één histogram tegelijk bekeek. Terwijl ze met een histogram bezig was, volgde haar blik een herhalend rechthoekig patroon: ze bewoog haar blik telkens van de verticale as naar de top van een staaf, dan naar beneden richting de horizontale as, terug naar de staaf en vervolgens naar de volgende staaf. Binnen dit patroon keek ze telkens lang naar de staven.

Interpretatie door de leerkracht/onderzoeker: Op basis van haar gedrag lijkt het erop dat Erika de taak benaderde vanuit een lokaal in plaats van een globaal beeld van de data. Ze focuste op de data en werkte de staven binnen één histogram een voor een af voordat ze naar het andere histogram ging. Dit suggereert dat ze de staven als de centrale eenheden van haar redenering behandelde, in plaats van de twee histogrammen als volledige verdelingen te vergelijken. Het lange ‘kijken’ naar een staaf kan erop wijzen dat ze eerder aan het nadenken was dan echt naar de staaf te kijken (in dit geval waarschijnlijk om getallen in haar hoofd op te tellen). Ze vermenigvuldigde de waarden met de bijbehorende frequenties en telde ze op, maar deelde vervolgens door het aantal staven, alsof elke staaf één datapunt voorstelde. In histogrammen worden de data gegroepeerd in klassen, en het bepalen en vergelijken van gemiddelden vereist dat je rekening houdt met de volledige verdeling en het totale aantal waarnemingen – de som van de frequenties, niet het aantal staven. Deze lokale aanpak kan daardoor leiden tot foute conclusies bij het vergelijken van welke postbezorger gemiddeld de zwaarste pakketten bezorgt.

Onderliggende conceptuele moeilijkheid: De systematische fout is waarschijnlijk te wijten aan een onderliggende conceptuele moeilijkheid met het concept verdeling bij het bepalen en vergelijken van gemiddelden in histogrammen. Ze wijst op een eerder procedurele dan conceptuele integratie van frequenties. Erika lijkt een aangeleerde regel “waarde $\times$ frequentie” toe te passen zonder die af te stemmen op de juiste noemer: ze deelt door het aantal staven, alsof elke staaf één gemeten waarde voorstelt. De fout weerspiegelt een breuk in het redeneren over verdelingen: Erika houdt gedeeltelijk rekening met de groepering van de data door waarden te wegen met frequenties, maar slaagt er niet in dit te integreren in een globaal beeld van de verdeling. Bovendien gebruikt ze geen kenmerken van de verdeling die centraal staan bij het vergelijken van gemiddelden in dubbele histogrammen, zoals vorm en verschuiving. In dit geval hebben de twee histogrammen dezelfde algemene vorm en staan de staven op dezelfde posities, terwijl de frequenties geschaald zijn (bv. verdubbeld). Dat verandert het aantal waarnemingen, maar niet de ligging van de verdeling langs de horizontale as; het gemiddelde blijft daardoor hetzelfde.

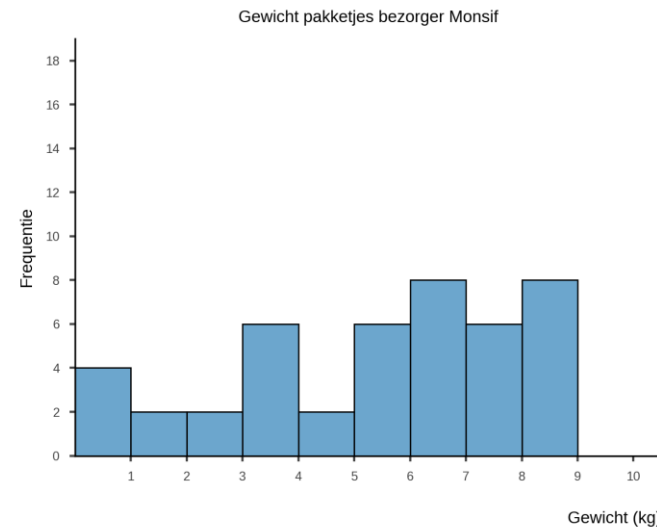
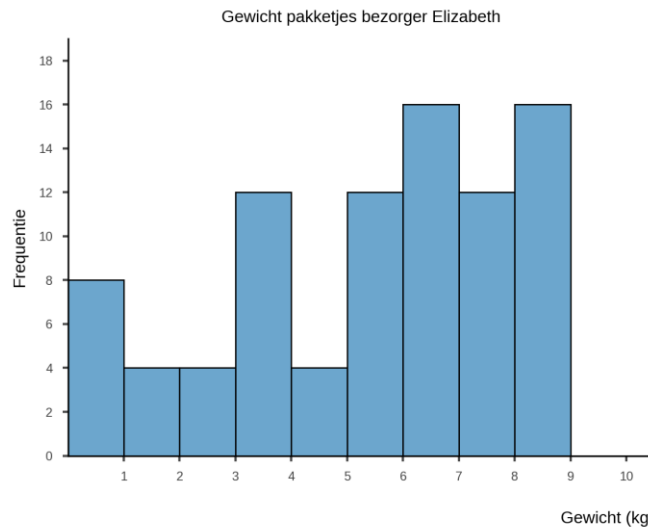


Practice



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

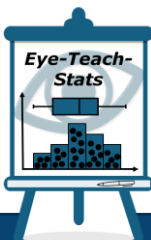
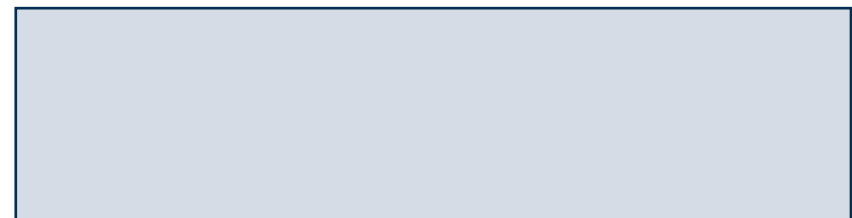


Welke postbezorger bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten?

- a) Elizabeth bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten.
- b) Monsif bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten.
- c) Het gemiddelde gewicht is ongeveer gelijk voor beiden.

Stel je voor dat een leerling dezelfde systematische fout maakt: te veel nadruk leggen op lokale kenmerken (tel-en-reken-strategie).

Beschrijf het mogelijke oogbewegingspatroon dat de leerling zou kunnen vertonen. Verwacht je dat deze fout hier optreedt? Waarom (niet)?



Ondersteunende informatie

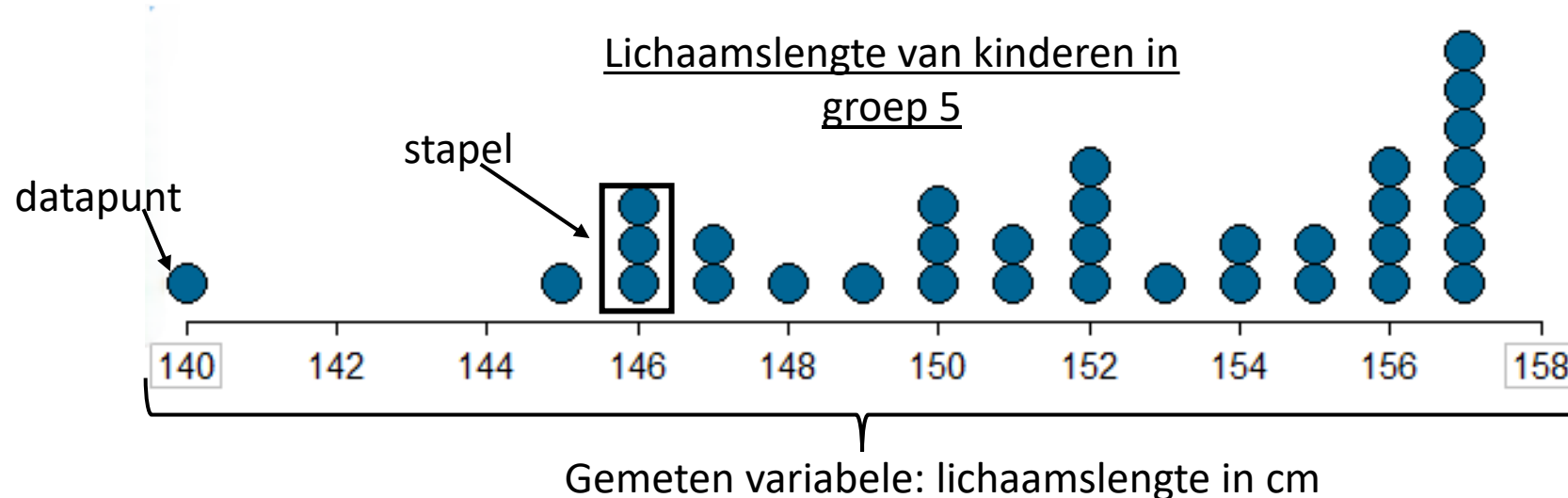
Dotplot



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Dotplots zijn grafische weergaven die gebruikt worden om de verdeling van een dataset weer te geven. In een dot plot wordt elk datapunt weergegeven door een bolletje langs een enkele as, typisch de horizontale as. Als er meerdere datapunten dezelfde waarde hebben, dan worden ze verticaal op elkaar gestapeld. Dotplots zijn bijzonder nuttig om kleine tot middelgrote datasets weer te geven.



Om verdelingen te vergelijken die zijn voorgesteld in dotplots kunnen zowel globale kenmerken als lokale details worden meegenomen.



Ondersteunende informatie globaal vs. lokaal beeld



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Perspectieven op dataverdelingen: lokaal vs. globaal beeld:

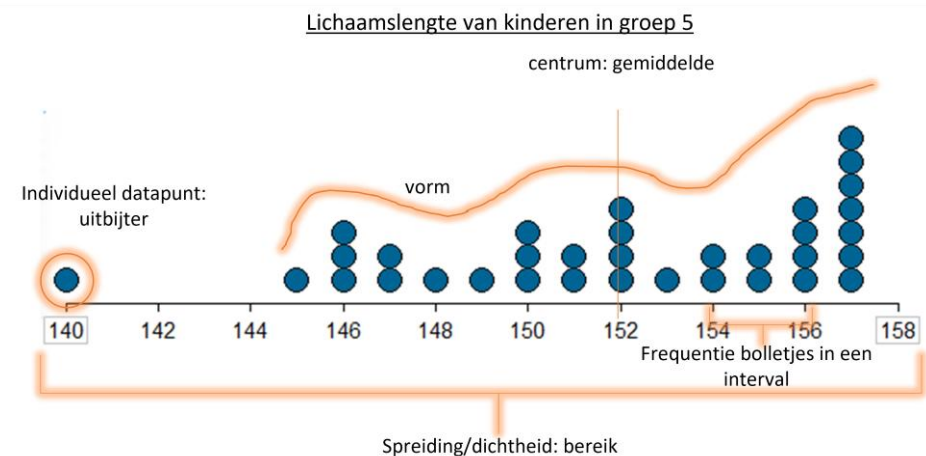
Een centraal doel in het statistiekonderwijs is om leerlingen te helpen om een “globaal beeld” te krijgen van verdelingen. In dit beeld zien leerlingen verdelingen als conceptuele entiteiten met algemene kenmerken zoals een centrum, spreiding en vorm. Maar veel leerlingen zien verdelingen enkel als verzamelingen van individuele datapunten. Dit leidt hen ertoe om te veel te focussen op lokale details van de verdeling. Dit noemen we een “lokaal beeld” van dataverdelingen.

Perspectieven op de verdelingen van data: lokaal vs. globaal beeld

Globaal beeld	Verdeling (conceptuele entiteit)			Lokaal beeld
	Globale kenmerken			
	centrum <i>Visueel geschat gemiddelde...</i>	Spreiding/dichtheid <i>Geobserveerde uitgespreidheid, meerderheid, bereik, ...</i>	Vorm <i>Geobserveerde scheefheid, pieken, staarten...</i>	
	Lokale kenmerken Individuele datapunten <i>Extreme waarden, uitbijters, absolute frequentie van bolletjes in bepaalde intervallen, waarde van bepaalde intervallen, waarden los van de verdeling aan de uiteinden ...</i>			

Aangepast naar Schreiter & Vogel, 2023

Om verdelingen die voorgesteld zijn in dot plots te vergelijken kunnen zowel globale kenmerken (bijv. Centrum, spreiding/dichtheid) als lokale kenmerken (bijv. Uitbijters/uitschieters) worden meegenomen.



Ondersteunende informatie

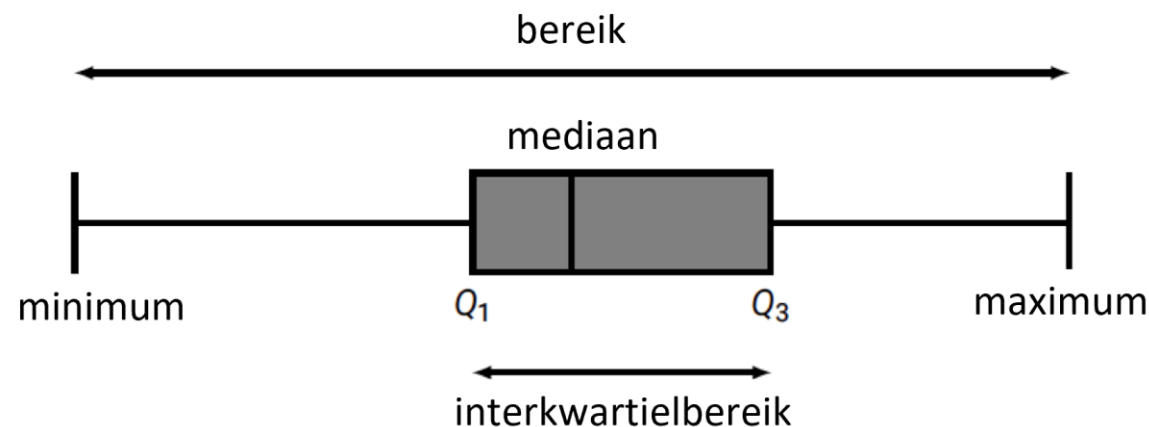
Boxplot



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een boxplot, ook gekend als een doos-met-snorharendiagram, is een grafische voorstelling die een bondige samenvatting geeft van de verdeling van een set gegevens. Ze toont op een effectieve manier belangrijke statistische maten op een visueel intuïtieve manier. Door deze maten te tonen geven boxplots een waardevol inzicht in de centrale tendens, variabiliteit en scheefheid van de data. In hun essentie bestaan boxplots uit vijf belangrijke componenten: de mediaan, het eerste kwartiel (Q_1), het derde kwartiel (Q_3), het interkwartielbereik (IKB), de extremen (maximum en minimum) en het bereik.



Door deze componenten te combineren biedt de boxplot een duidelijke en bondige samenvatting van de verdeling, en is ze bijzonder nuttig om de verdeling van meerdere datasets tegelijk te vergelijken, en een snelle en effectieve data-analyse en interpretatie mogelijk te maken. Samengevat is een boxplot een krachtig instrument in verkennende data-analyse. Of ze nu gebruikt wordt in statistisch onderzoek, in het visualiseren van data of in beslissingsprocessen, boxplots zijn onmisbaar voor het begrijpen van de kenmerken van de verdelingen van data.



Ondersteunende informatie

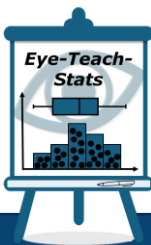
Boxplot II



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Alle leerlingen in een klas gaven aan hoeveel minuten ze de voorgaande dag aan huiswerk hadden besteed.



Ondersteunende informatie

Case-Value Plot



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Een Case-value plot /casus-staafdiagrammen (CVP) is een ander type grafiek met staven, waarin de hoogte van elke staaf één gemeten waarde voorstelt. In een case-value plot met nominale data op de horizontale as en numerieke data op de verticale as (twee gemeten variabelen) staat de relevante gemeten waarde op de verticale as en kan variabiliteit gezien worden als variatie in de hoogtes van de staven.

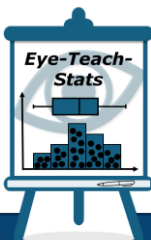
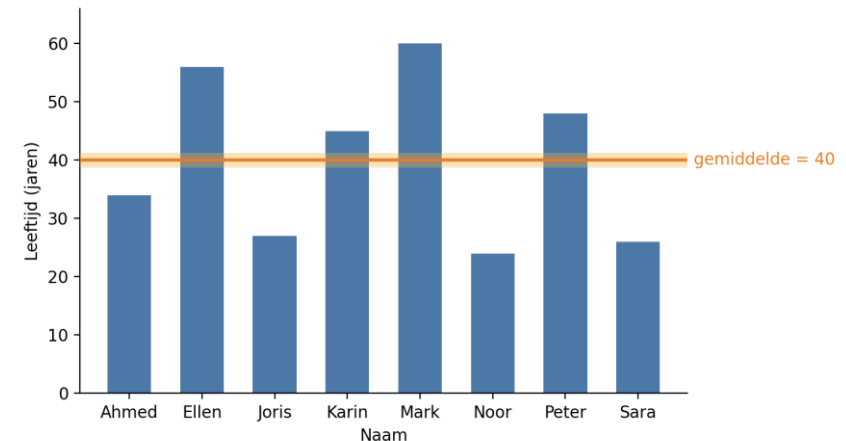
Waarom gebruiken we het casus-staafdiagram?

- Om metingen van nominale data visueel te vergelijken
- Om de gemiddelden van groepen of categorieën (= nominale data) per casus te vergelijken
- Om de verschillen tussen de afzonderlijke metingen te zien

Voorbeeld:

Dit casus-staafdiagram toont de leeftijd van de acht docenten in de wiskundesectie van een school. Elke staaf staat voor één docent. De gemiddelde leeftijd kan worden weergegeven door een horizontale lijn op 40 jaar, die de verticale as op dat getal snijdt.

Voor het gemiddelde geldt dat de lege (witte) ruimte tussen de lijn en de lagere staven precies even groot is als de delen van de hogere staven die boven de lijn uitkomen. Als de delen boven de lijn naar de lege ruimtes eronder worden verplaatst, worden alle staven even hoog.



Ondersteunende informatie

Histogram



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

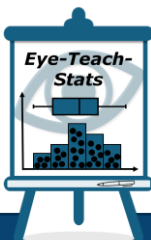
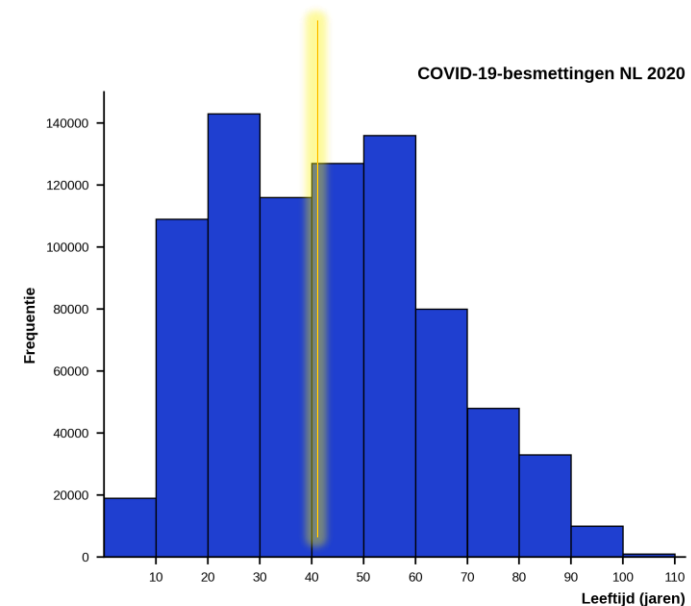
Een histogram is een grafiek met staven die aan de volgende criteria voldoet:

- Het bestaat uit staven die groepen numerieke gegevens voorstellen.
- Het geeft gegevens weer van slechts één statistische variabele (meestal continu).
- De statistische variabele wordt conventioneel weergegeven op de horizontale as.
- De statistische variabele wordt gemeten op interval- of ratiomeetniveau.
- De verticale as toont de klassendichtheid of – wanneer de klassebreedtes gelijk zijn – de relatieve of absolute frequentie (aantal) van de weergegeven variabele.
- De totale dichtheid is gelijk aan 1 of de totale relatieve frequentie is gelijk aan 100%.

Zo analyseer en interpreteer je een histogram:

De gemiddelde leeftijd (ongeveer 43 jaar) ligt op de horizontale as en kan worden voorgesteld door een verticale lijn die de horizontale as snijdt bij 43 jaar – dat is het balanspunt van de grafiek.

Dit kan ook geschat worden door het midden van elke klasse te vermenigvuldigen met de hoogte van de staaf, deze producten op te tellen en vervolgens te delen door de som van de frequenties.



Procedurele informatie

Hittemap



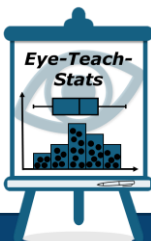
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

In hittemappen worden de oogbewegingsdata die verzameld worden door apparatuur geprojecteerd op de originele stimulus, om zo een gecombineerd beeld te geven van de stimulus en de oogbewegingen van de participant.



De visualisatie toont gekleurde zones die fixaties voorstellen. De verdeling van fixaties, waarin de participant relatief stabiel op een bepaalde plaats op de stimulus bleef, wordt aangegeven door de kleur. Hoe roder en helderder de kleur, hoe langer de regio is bekeken.



Procedurele informatie

Oogbewegingsvideo



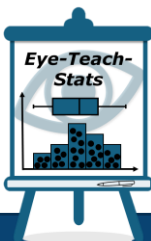
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

In een oogbewegingsvideo worden oogbewegingsdata die verzameld wordt door apparatuur geprojecteerd bovenop de originele stimulus, om zo een gecombineerd beeld te geven van de stimulus en de oogbewegingen van de participant.



De visualisatie bevat cirkels die fixaties weergeven en lijnen die saccades weergeven. Elke cirkel geeft een moment weer waarop de blik van een participant relatief stabiel op een bepaalde plaats in de stimulus bleef. De lijnen geven snelle oogbewegingen aan tussen twee cirkels.



Procedurele informatie

Oogbewegingsgrafiek



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

In een oogbewegingsgrafiek worden oogbewegingsdata verzameld met oogbewegingsapparatuur, en geprojecteerd bovenop de originele stimuli, waardoor een gecombineerd beeld wordt gecreëerd van de originele stimulus en de oogbewegingen van de participant.



De visualisatie bevat zowel bolletjes als lijnen, die respectievelijk fixaties en saccades voorstellen. Fixaties worden voorgesteld als bolletjes, waarbij elk bolletje een fase aanduidt waarin de blik van de participant relatief stabiele op een specifieke zone van de stimulus bleef. Saccades, anderzijds, worden weergegeven door lijnen die twee opeenvolgende fixaties weergeven. Deze lijnen wijzen op snelle oogbewegingen tussen verschillende zones van de stimulus.



Oplossing van Amaya

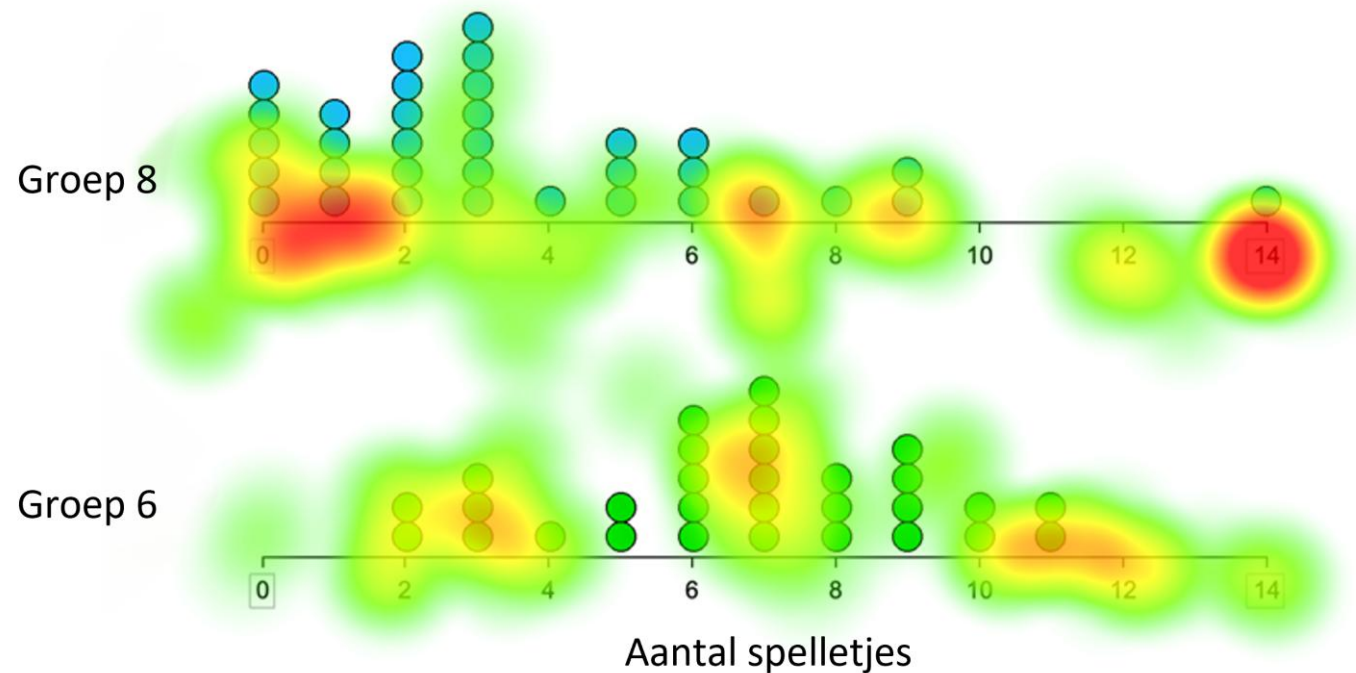


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Amaya's antwoord: “Ik denk dat a) correct is: de leerlingen in groep 8 hebben meer spelletjes.”

Amaya's commentaar: “Hier zag ik dat een leerling van groep 8 14 spelletjes had. Dat is heel erg veel en dat heeft een grote invloed. Ik denk dus dat de leerlingen in groep 8 meer spelletjes hebben.”



Oplossing van Quinn



Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

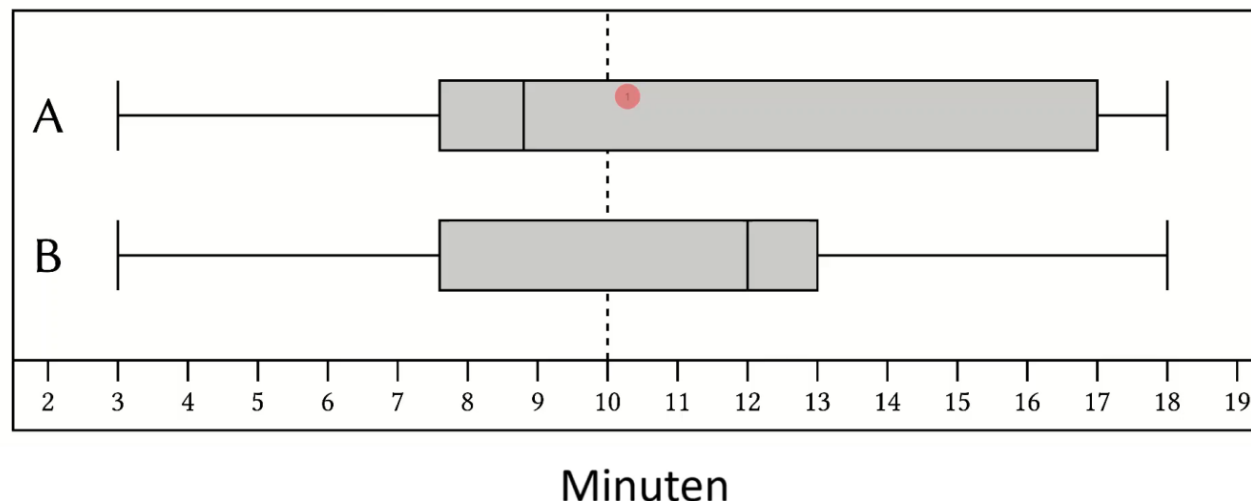
Quinn's answer: "Voor mij is School A duidelijk het juiste antwoord. Je kan makkelijk in boxplot A zien dat veel meer leerlingen aangaven dat ze meer dan 10 minuten naar school wandelden."

Quinn's comment: "De boxplot geeft alle antwoorden weer, om het zo maar even te zeggen. Dus ben ik nagegaan waar er meer van de doos is boven de 10-minutenlimiet. Dat is duidelijk het geval voor boxplot A, dus heb ik ook voor School A gekozen."

Eén school heeft een groter aantal leerlingen die meer dan 10 minuten naar school moeten lopen. **Bepaal welke school dat is.**

One school has a larger number of children with a walk to school longer than 10 minutes.

Decide which one.



Oplossing van Elodie

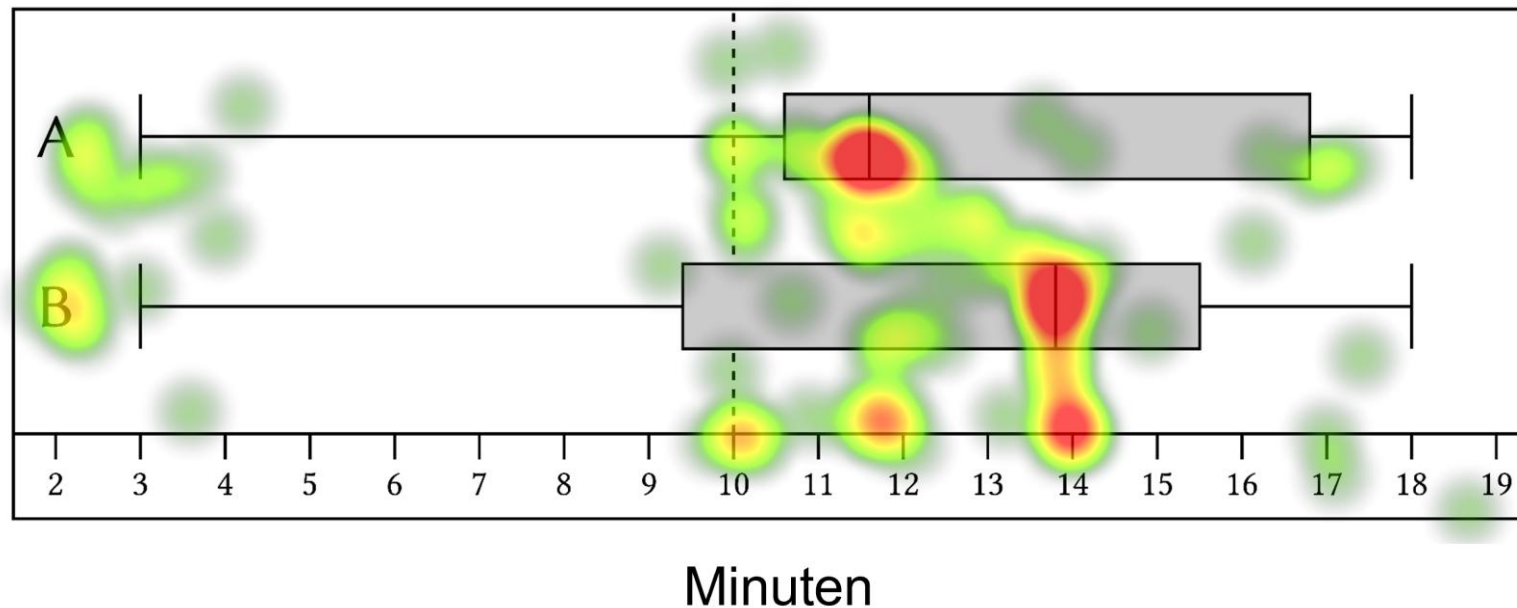


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Elodies antwoord: “Voor mij is School B duidelijk het juiste antwoord. Je kan makkelijk in boxplot B zien dat veel meer leerlingen aangaven dat ze meer dan 10 minuten naar school wandelden.”

Elodies commentaar: “De lijn in het midden van de doos is de mediaan, die een gemiddelde waarde is. Dus ik heb vooral de twee medianen vergeleken. Je kan duidelijk zien dat de leerlingen van school B er gemiddeld veel langer over doen om naar school te wandelen dan die van school A. Dus koos ik school B.”



Oplossing van Roos

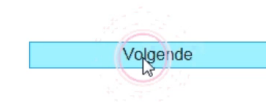
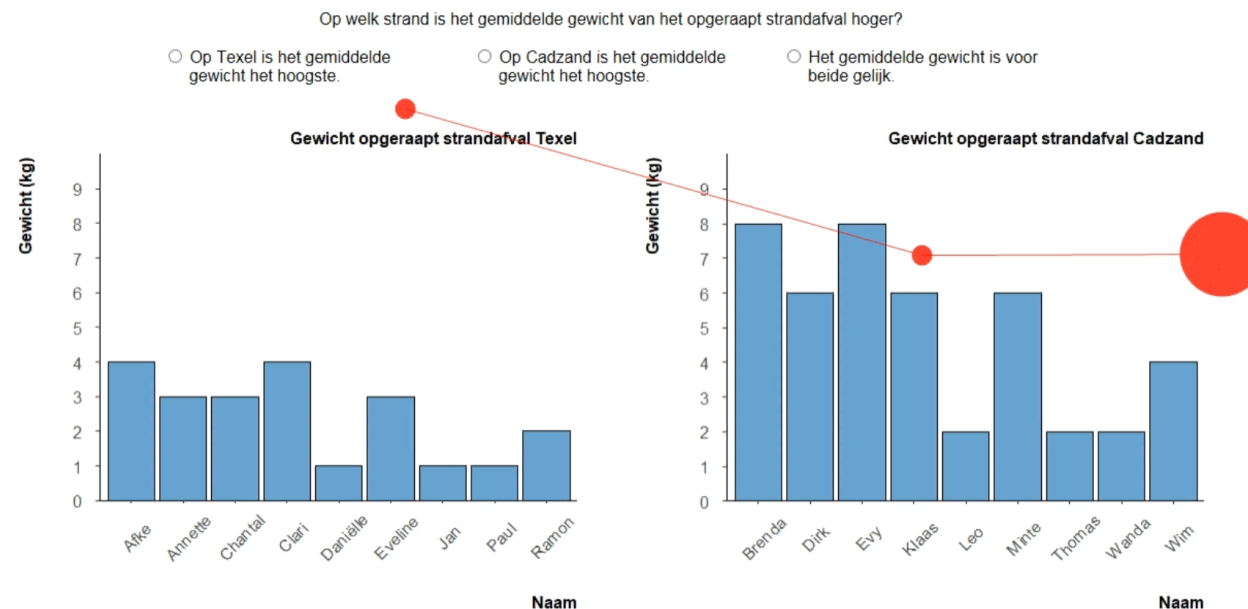


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Roos' antwoord: "Het gemiddelde gewicht is voor beide ongeveer hetzelfde."

Roos' commentaar: "Ik dacht dat de gemiddelden hetzelfde waren omdat ik keek naar de gewichten in beide grafieken. Wanneer ik zag dat de gewichten in één grafiek twee keer zo hoog waren, bedacht ik me dat het patroon hetzelfde was maar met hogere waarden. Dus dacht ik dat de gewichten nog steeds hetzelfde zouden zijn."



Oplossing van Aline

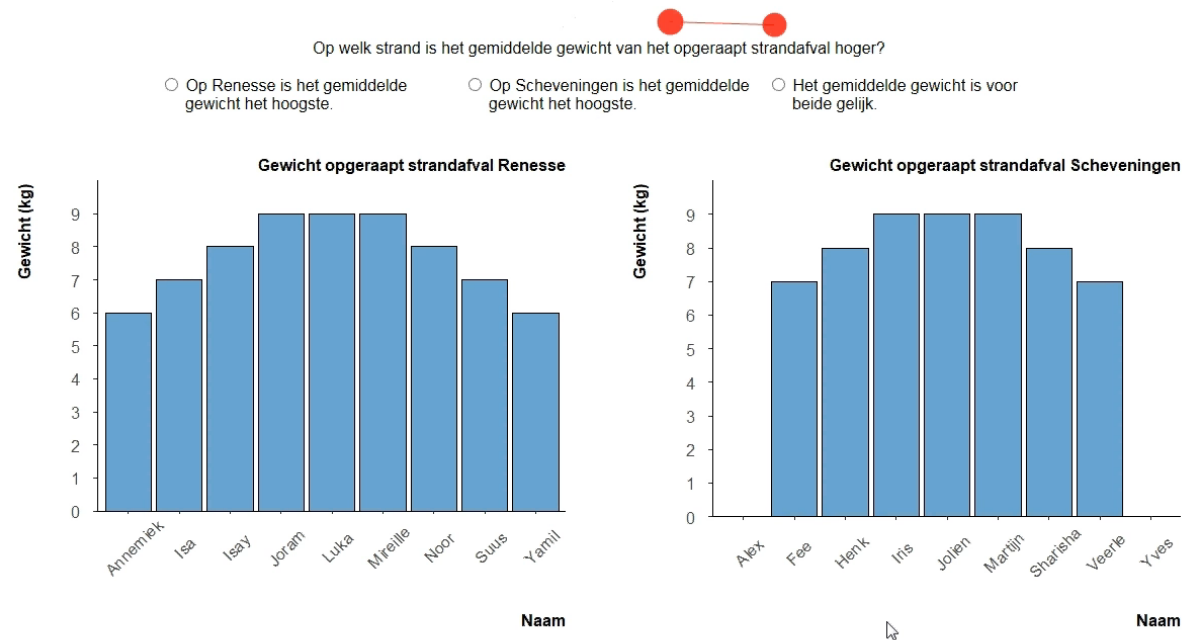


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Alines antwoord: "Het gemiddelde gewicht is voor beide ongeveer hetzelfde."

Alines commentaar: "Wanneer ik de grafieken van de gewichten die verzameld werden op de twee stranden vergeleek, dacht ik dat de gemiddelde gewichten ongeveer hetzelfde waren. Ik keek naar de grafieken en probeerde te zien of de gewichten aan beide kanten uitbalanceerden. Ik bedacht me dat als de erg zware en erg lichte gewichten gelijk leken aan elk uiteinde, ze elkaar zouden cancelen zodat de gewichten ongeveer hetzelfde zouden zijn. Ik zag dat de balken aan beide einden van de grafiek op dezelfde afstand van het midden lagen, dus ik dacht dat ze elkaar zouden uitbalanceren."



Volgende



Oplossing van Zeyd

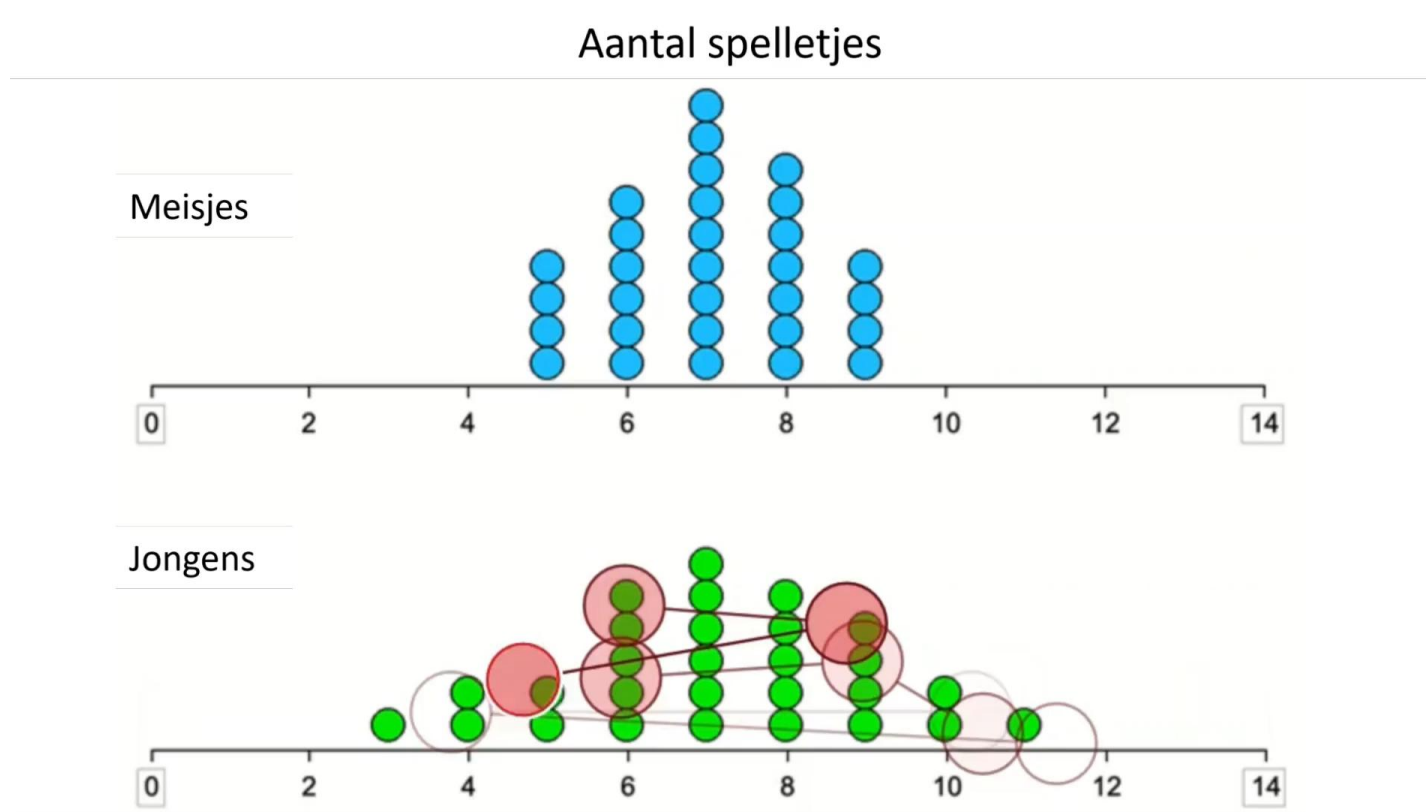


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Zeyds antwoord: “Ik zou a) zeggen. De meisjes hebben veel meer spelletjes op hun telefoon.”

Zeyds commentaar: “Ik keek dus hoeveel bolletjes er waren en ik vergeleek ze. Bijvoorbeeld, jongens en meisjes hebben hetzelfde aantal bolletjes bij negen, maar de meisjes hebben meer bolletjes bij zeven en acht, enzovoort. De kleine stapels aan de buitenkant bij de jongens zijn niet zo belangrijk. Daarom denk ik dat de meisjes veel meer spelletjes hebben.”



Oplossing van Sem

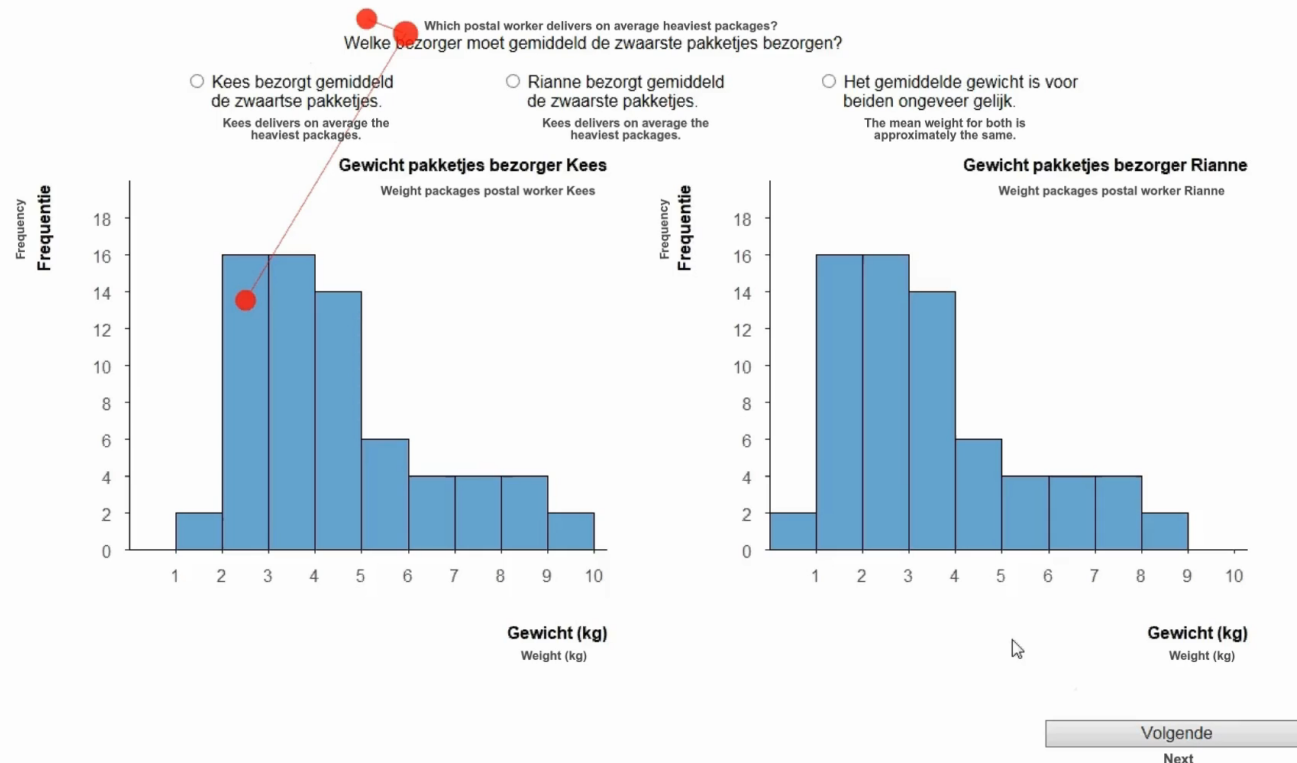


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Sems antwoord: “Het gemiddelde gewicht is voor beiden ongeveer gelijk.”

Sems commentaar: “Ik zag dat Kees zwaardere pakketten had met minder lichte, en dat Rianne vooral lichtere pakketten had met een paar zware. Maar de verdelingen leken op elkaar. Ik vergeleek elk paar stapels in de histogrammen, en het leek erop dat de verschillen in stapels elkaar konden compenseren, dus ik denk dat de gemiddelde gewichten ongeveer gelijk waren.”



Oplossing van Eva

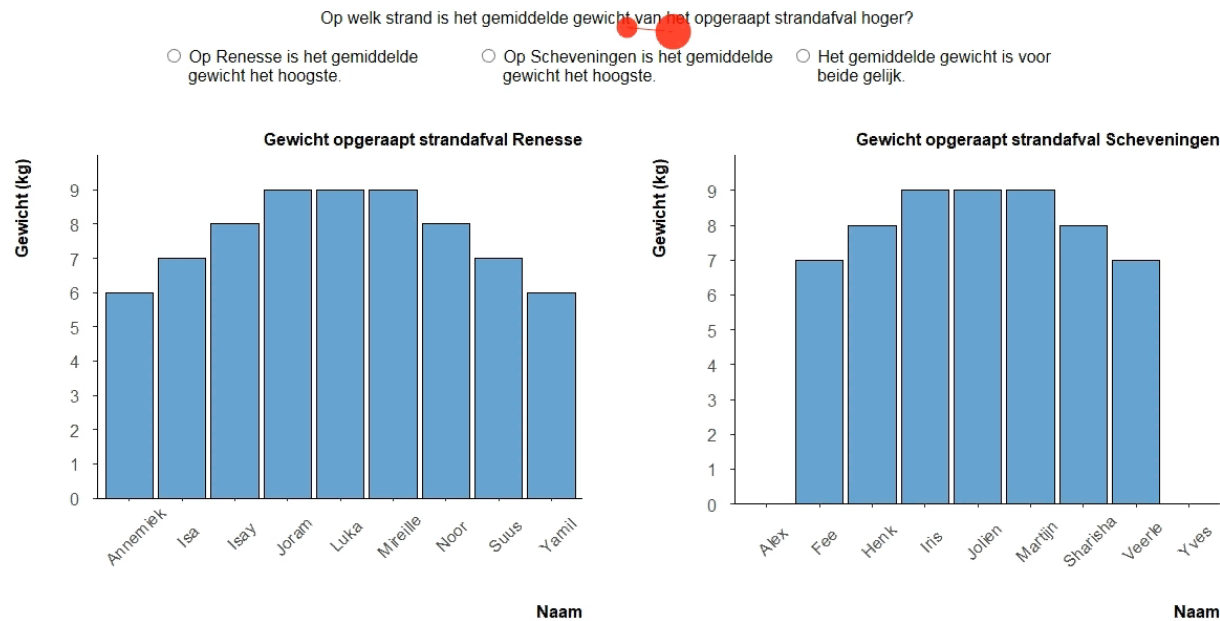


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Eva's antwoord: "Op Scheveningen is het gemiddelde gewicht het hoogste."

Eva's commentaar: "Ik vergeleek enkele balken van elke grafiek een voor een en zag dat Renesse meer balken had met lagere waarden, dus ik dacht dat Scheveningen dus een hoger strandafvalgewicht moest hebben."



Volgende



Oplossing van Sophie

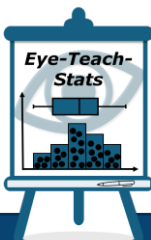
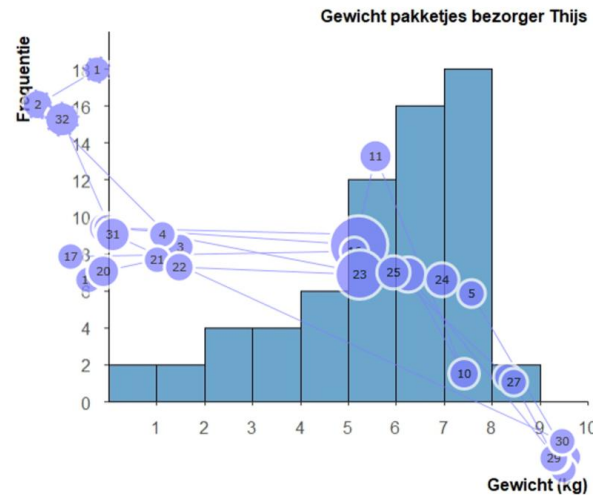


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Sophies antwoord: "Het gemiddelde is ongeveer 8."

Sophies commentaar: "Ik keek hoe hoog de balken waren in de grafiek om te zien hoe vaak dingen voorkwamen. Daarna probeerde ik te schatten waar het gemiddelde zou liggen op basis daarvan. Ik probeerde ook de balken allemaal even hoog te maken, zodat het makkelijker zou zijn."



Oplossing van Noel

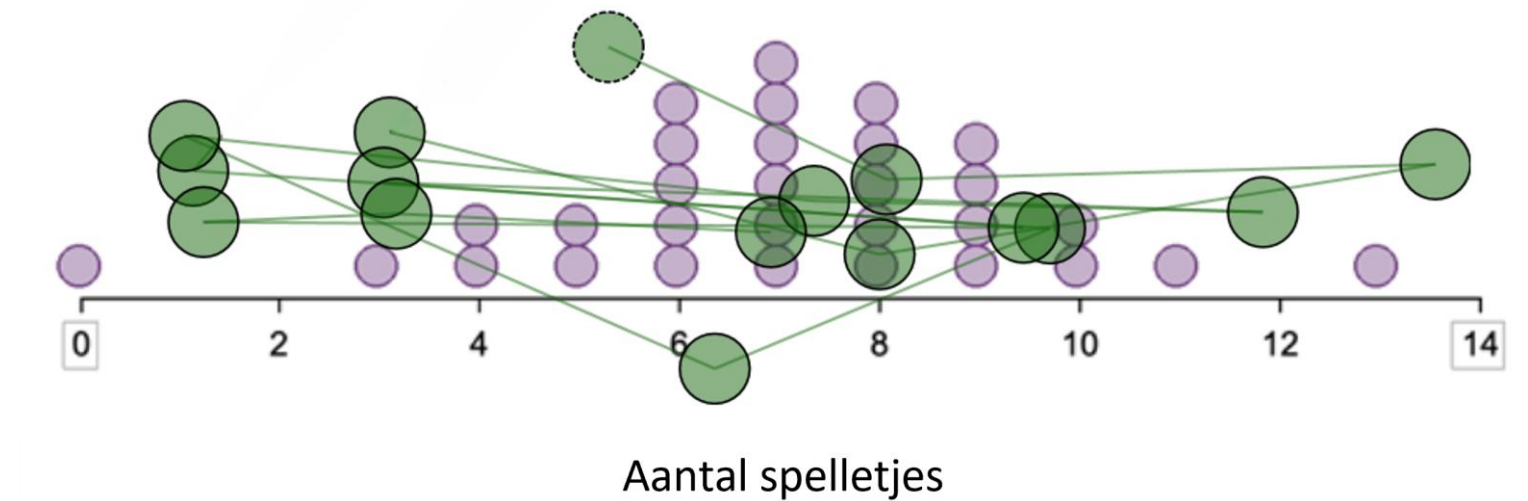


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Noels antwoord: “Het rekenkundige gemiddelde is ongeveer twee.”

Noels commentaar: “Ik denk dat het twee is omdat wanneer ik er naar kijk, er enkele leerlingen zijn met veel spelletjes en sommige met geen spelletjes. Ik probeerde de stapels even hoog te maken om het rekenkundige gemiddelde te schatten. Dan zijn er overall ongeveer twee bolletjes.”



Oplossing van Talia

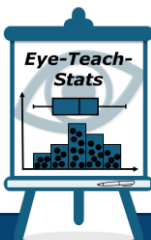
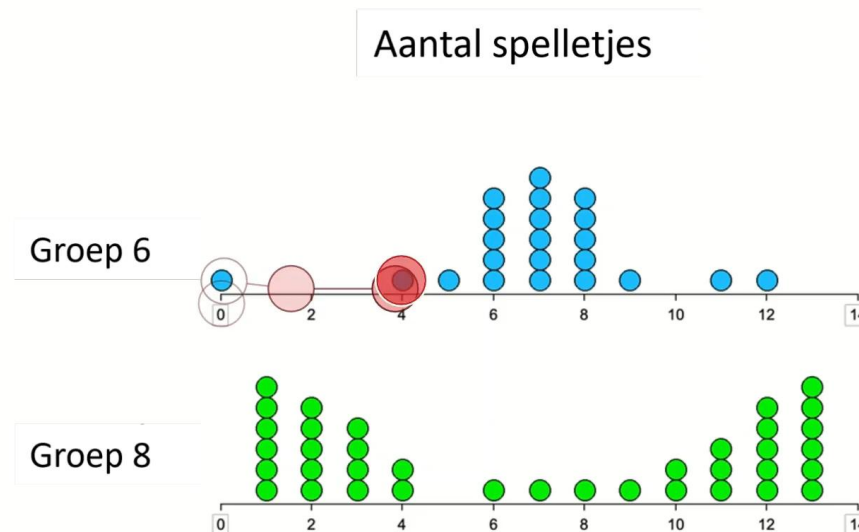


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Talia's antwoord: "Ik zou dus zeggen dat b) het correcte antwoord is. Leerlingen in groep 8 hebben veel meer spelletjes op hun telefoon."

Talia's commentaar: "Eerst telde ik vier plus vijf, wat negen is. Hier telde ik vijf mensen die zes spelletjes hebben, en berekende vijf maal zes, wat dertig is. Dan telde ik de negen van eerder er bij, wat in totaal 39 is. Dan telde ik en hier telde ik 9, 11 en 13 op, wat een totaal van 134 spelletjes voor leerlingen in groep 6 gaf. Voor groep 8 telde ik 6 keer 13 plus 5 keer 12 en dat was al meer dan wat de leerlingen in groep 6 hebben."



Oplossing van Mustafa



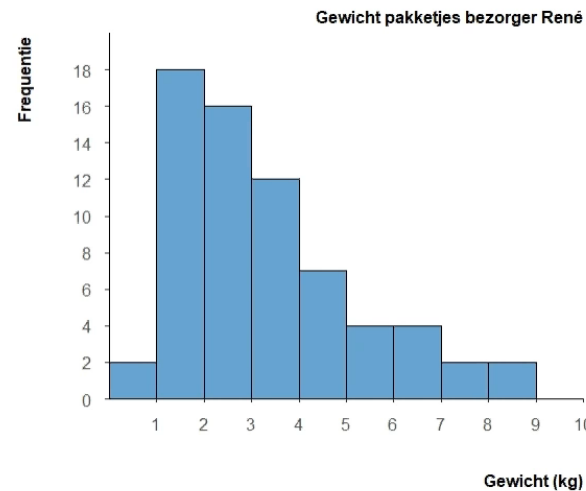
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

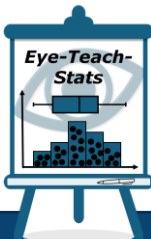
Mustafa's antwoord: “Het gemiddelde is ongeveer zeven.”

Mustafa's commentaar: “Ik heb alle frequenties bij elkaar opgeteld en daarna gedeeld door negen. En toen kreeg ik een getal dat ongeveer het gemiddelde zou moeten zijn.”

Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht van de pakketjes die René bezorgt?



Volgende



Oplossing van Finn

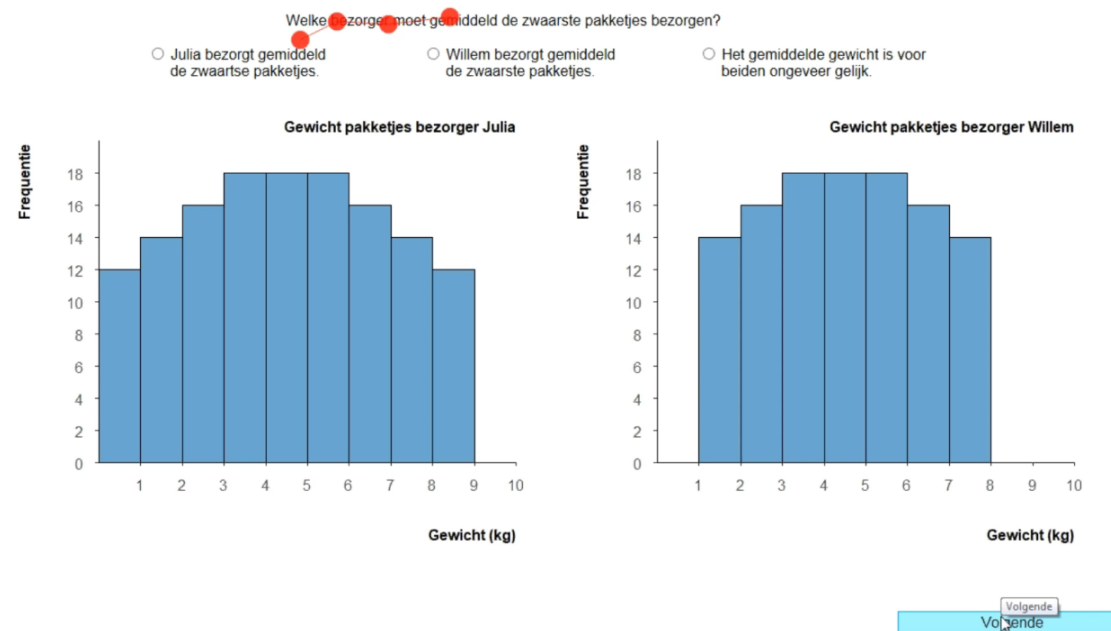


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Finns antwoord: "Julia bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketjes."

Finns commentaar: "Ik keek naar de balken en vergeleek ze. Ik zag dat Willem minder balken had en dat Julia meer balken had verspreid over het bereik. Omdat we het hebben over het gemiddelde gewicht, dacht ik dat meer balken – zoals in Julia's histogram – zouden betekenen dat het gemiddelde gewicht hoger was. Ook al ontbraken er balken bij Willem, dacht ik dat dat betekende dat er in die bereiken niets was. Dus koos ik voor Julia, omdat ik meer balken zag en aannam dat dat het gemiddelde gewicht verhoogde."



Oplossing van Linda

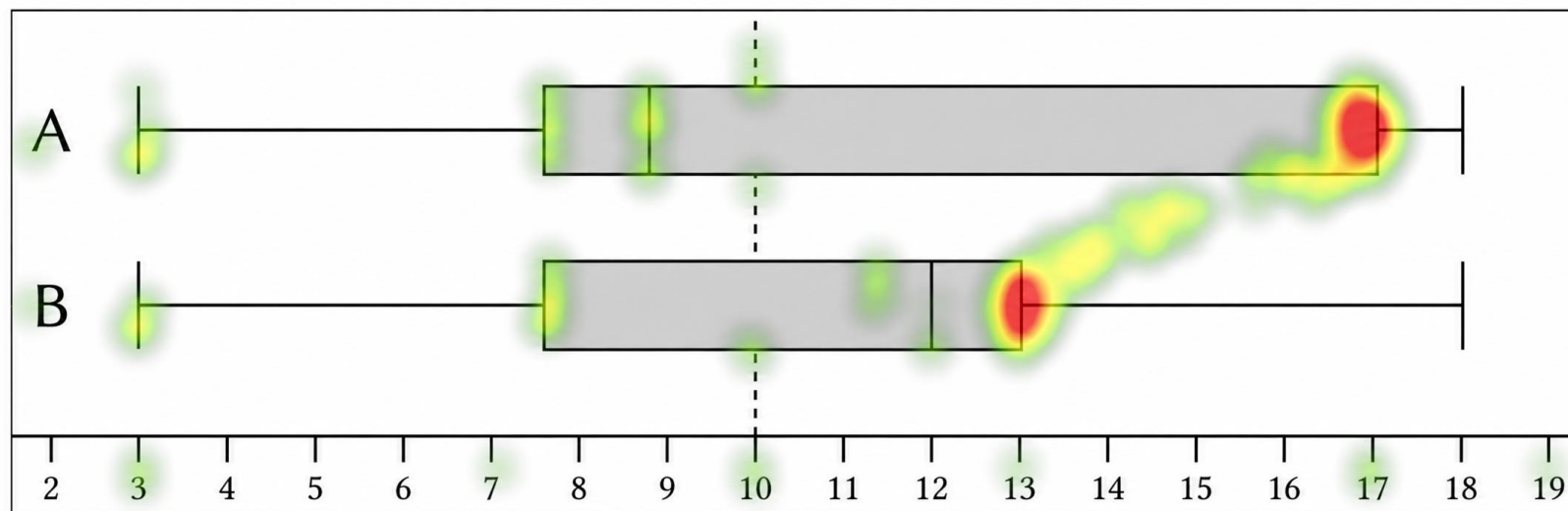


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Linda's antwoord: “Voor mij is School A duidelijk het juiste antwoord. Je kan makkelijk in boxplot A zien dat veel meer leerlingen aangaven dat ze meer dan 10 minuten naar school wandelden.”

Linda's commentaar: “De boxplot geeft alle antwoorden weer, om het zo maar even te zeggen. Dus ben ik nagegaan waar er meer van de doos is boven de 10-minutenlimiet. Dat is duidelijk het geval voor boxplot A, dus heb ik ook voor School A gekozen.”



Oplossing van Paul

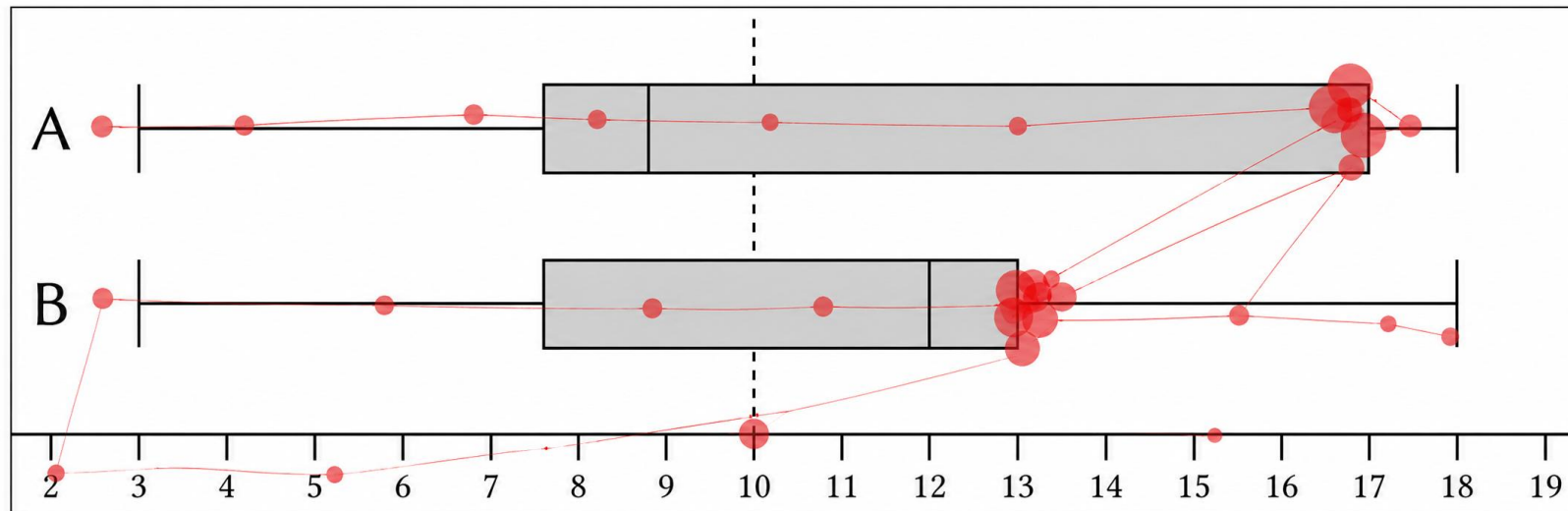


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Pauls antwoord: “Voor mij is School A duidelijk het juiste antwoord. Je kan makkelijk in boxplot A zien dat veel meer leerlingen aangaven dat ze meer dan 10 minuten naar school wandelden.”

Pauls commentaar: “De boxplot geeft alle antwoorden weer, om het zo maar even te zeggen. Dus ben ik nagegaan waar er meer van de doos is boven de 10-minutenlimiet. Dat is duidelijk het geval voor boxplot A, dus heb ik ook voor School A gekozen.”



Oplossing van Katharina



Co-funded by
the European Union

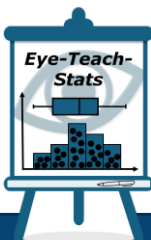
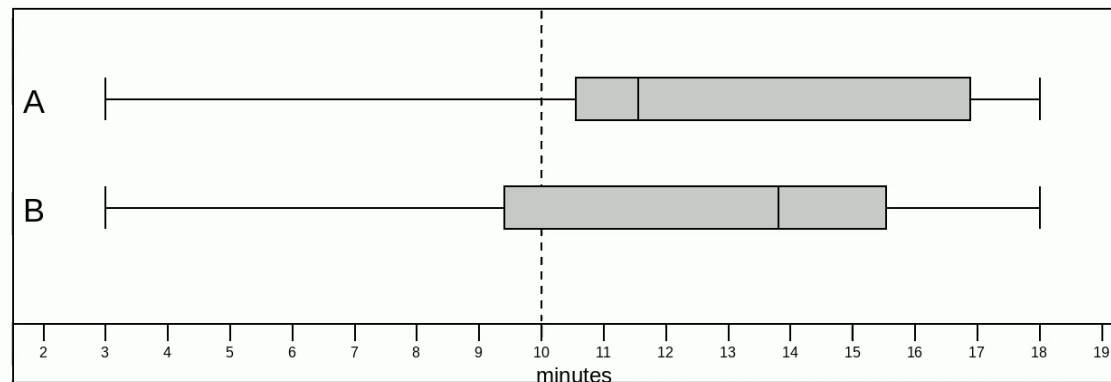
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Katharina's antwoord: “Voor mij is School B duidelijk het juiste antwoord. Je kan makkelijk in boxplot B zien dat veel meer leerlingen aangaven dat ze meer dan 10 minuten naar school wandelden.”

Katharina's commentaar: “De lijn in het midden van de doos is de mediaan, die een gemiddelde waarde is. Dus ik heb vooral de twee medianen vergeleken. Je kan duidelijk zien dat de leerlingen van school B er gemiddeld veel langer over doen om naar school te wandelen dan die van school A. Dus koos ik school B.”

One school has a larger number of children with a walk to school longer than 10 minutes.

Decide which one.



Oplossing van Fabian



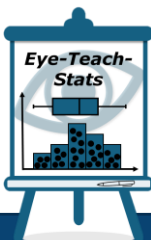
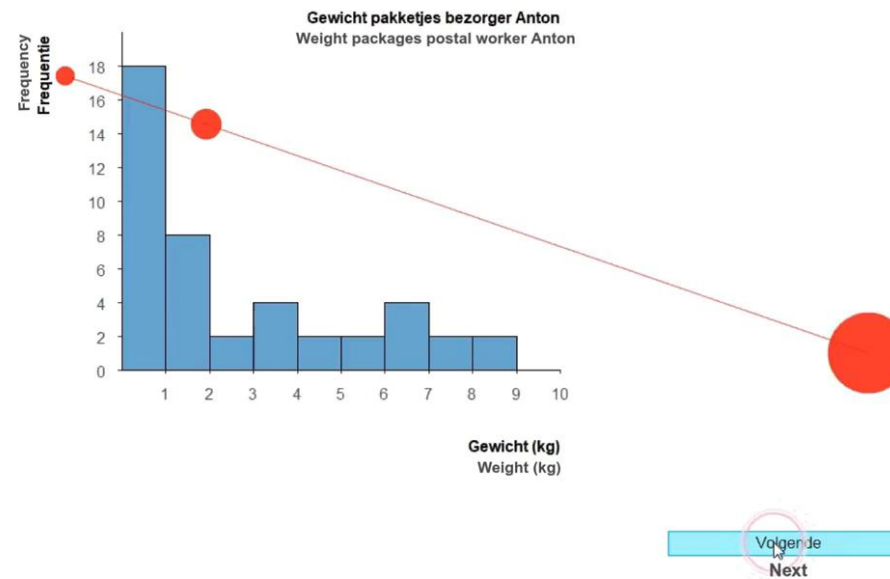
Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Fabians antwoord: “Het rekenkundige gemiddelde is ongeveer zes.”

Fabians commentaar: “Ik keek naar de waarden op de as – ik zag vooral lage waarden en één hoge, dus schatte ik dat het ergens rond zes zou liggen.”

What is approximately the mean weight of the packages Anton delivers?
Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht van de pakketjes die Anton bezorgt?



Oplossing van Ella

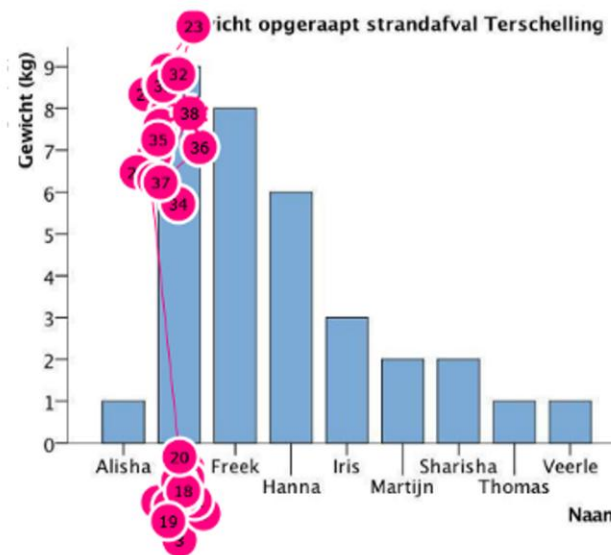


Co-funded by
the European Union

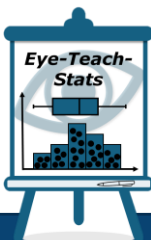
Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Ella's antwoord: "Het gemiddelde gewicht is negen."

Ella's commentaar: "Ik keek waar de grafiek ongeveer in evenwicht was, en dat leek rond Bram te zijn, dus nam ik 9 als gemiddelde."



Wat is ongeveer het gemiddelde gewicht dat per persoon werd verzameld?



Oplossing van Martijn

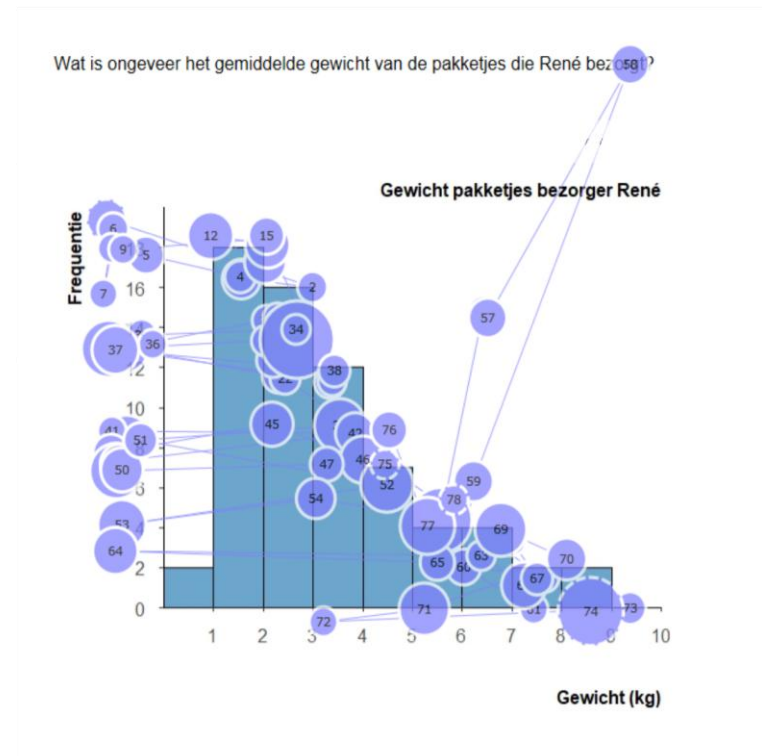


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Martijns antwoord: “Het rekenkundige gemiddelde is ongeveer zes.”

Martijns commentaar: “Ik las af hoeveel elke staaf was en telde die bij elkaar op. Dus ik begon met twee, dan achttien, dan zestien, en ik bleef optellen terwijl ik naar de staven keek. Daarna deelde ik door negen.”



Oplossing van Erika

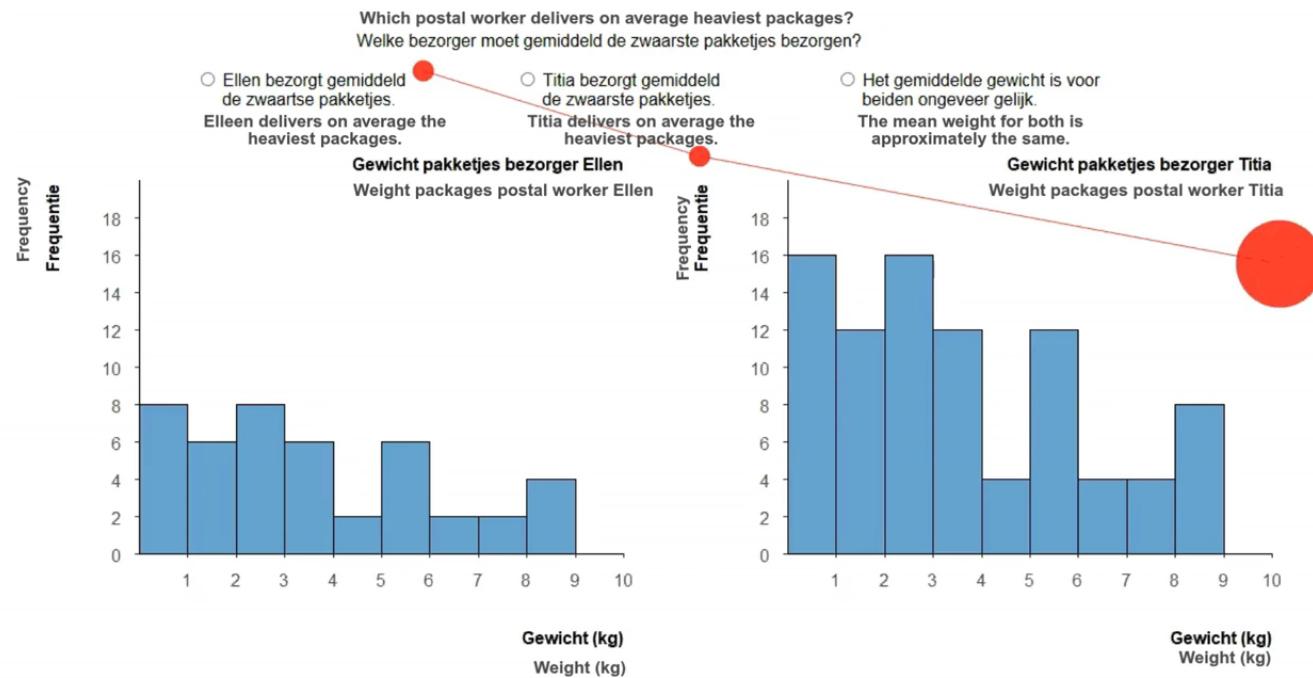


Co-funded by
the European Union

Erasmus+
Enriching lives, opening minds.

Erika's antwoord: "Titia bezorgt gemiddeld de zwaarste pakketten."

Erika's commentaar: "Ik wilde het gemiddelde gewicht vinden, dus ik keek naar elke staaf. Bij elke staaf vermenigvuldigde ik de gewichtswaarde met de frequentie waarmee die voorkwam. Daarna telde ik al die resultaten bij elkaar op en deelde ik door het aantal staven, omdat elke staaf een deel van de data voorstelt. Dat deed ik voor beide histogrammen en ik kreeg een hoger resultaat voor Titia, dus koos ik Titia."



Volgende
Next

